

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

12. 3. TRİGONOMETRİ

12. 3. 1. Toplam – Fark ve İki kat Açı Formülleri

12. 3. 1. 1. İki açının ölçüleri toplamının ve farkının trigonometrik değerlerine ait formülleri oluşturarak işlemler yapar.

Dönüşüm ve ters dönüşüm formülleri verilmez.

12. 3. 1. 2. İki kat açı formüllerini oluşturarak işlemler yapar.

3. ÜNİTE : TRİGONOMETRİ

Toplam – Fark Formülleri

Kural 1: Sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonlarının toplam ve fark formül açılımları aşağıdaki gibidir.

$$\sin (a + b) = \sin a . \cos b + \sin b . \cos a$$

$$\sin (a - b) = \sin a . \cos b - \sin b . \cos a$$

$$\cos (a + b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$

$$\cos (a - b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b \quad \text{olarak alınır.}$$

Trigonometrik değeri bilinmeyen bir açının sinüs veya kosinüsünü bulmak için, trigonometrik değerleri bilinen iki açı ölçüsünden faydalanırız.

Hatırlatma: *A*) Bilinen açı değerlerinin trigonometrik sonuçları soru çözümlerinde kullanılır.

x	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız
cot x	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

B) Bazı büyük açının dar açı türünden yazılması gerekmektedir. 180° ve 360° 'ye göre düzenlemelerde trigonometrik fonksiyonlar isim değiştirmezdi. Açının bulunduğu bölgeye göre işaret kontrolü yapılır ve sonuca eklenirdi.

Örneđin; $\tan \underbrace{212^\circ}_{3.\text{Bölge}} = \tan (180^\circ + 22^\circ) = + \tan 22^\circ$ bulunur.

90° ve 270° 'ye göre düzenlemelerde ise trigonometrik fonksiyonlar isim değiştirirdi. Açının bulunduğu bölgeye göre işaret kontrolü yapılır ve sonuca eklenirdi.

Örneđin; $\cos \underbrace{140^\circ}_{2.\text{Bölge}} = \cos (90^\circ + 50^\circ) = - \sin 50^\circ$ bulunur.

C) Çok büyük açılarda ise esas ölçü bulunarak işleme devam edilir.

Soru : $\cos 75^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Soru : $\sin 105^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Soru : $\sin 255^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Soru : $\cos 7575^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

Soru : $\cos 108^\circ \cdot \cos 18^\circ + \sin 108^\circ \cdot \sin 18^\circ = ?$

Soru : $\sin 17^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 17^\circ = ?$

Soru: $\cos 15^\circ \cdot \sin 105^\circ + \cos 105^\circ \cdot \sin 15^\circ = ?$

Soru :

$$\frac{\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 80^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 21^\circ \cdot \cos 24^\circ + \sin 24^\circ \cdot \cos 21^\circ} = ?$$

Soru :

$$\frac{\sin 62^\circ \cdot \sin 16^\circ + \cos 62^\circ \cdot \cos 16^\circ}{\sin 75^\circ \cdot \cos 31^\circ - \sin 31^\circ \cdot \cos 75^\circ} = ?$$

Soru: $x \in (0^\circ, 45^\circ)$ olsun.

$$\cos \left(\frac{11\pi}{18} + x \right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{9} \right) - \sin \left(\frac{11\pi}{18} + x \right) \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{9} \right) = ?$$

Soru: $x = \frac{\pi}{12}$ ise $\sin 13x \cdot \cos 5x - \sin 5x \cdot \cos 13x = ?$

Soru: $x - y = 60^\circ$ ise

$$(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = ?$$

Soru :

$$\frac{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\tan 30^\circ \cdot \sin 40^\circ} = ?$$

(Bilinen açıların tri-

gonometrik değerlerini yerine yazsak bir sonuç elde edemeyiz. Bu tarz sorularda toplam ya da farkın olduğu yerdeki tanjant yerine sin / cos alınır ve düzenleme yapılır.)

Soru: $a, b \in (0^\circ, 90^\circ)$ olmak üzere $\sin a = \frac{3}{5}$ ve

$\sin b = \frac{2}{3}$ ise $\sin (a + b) = ?$ (Verilen trigonometrik değerle-

ri ayrı dik üçgenlerde uygulamak işimizi kolaylaştırır.)

Soru: $a, b \in (0, \pi/2)$ olmak üzere $\sin a = \frac{4}{5}$ ve $\cos b = \frac{5}{13}$ ise; **A)** $\cos(a - b) = ?$

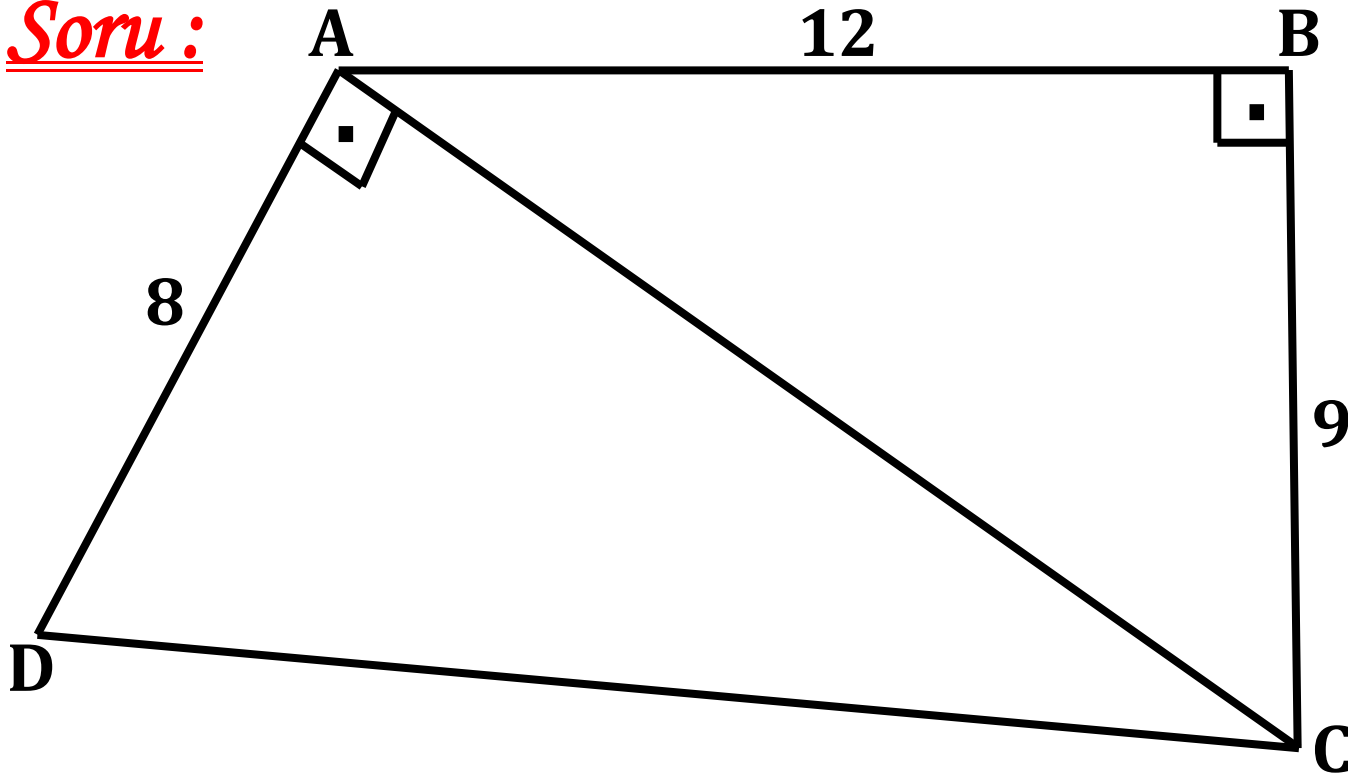
B) a , b ve c bir üçgenin iç açıları ise $\cos c = ?$

Soru: $\cos \left(\arccos \frac{4}{5} + \arctan \frac{5}{12} \right) = ?$

(Hatırlatma: $\arcsin x = a$ ise $\sin a = x$ idi.)

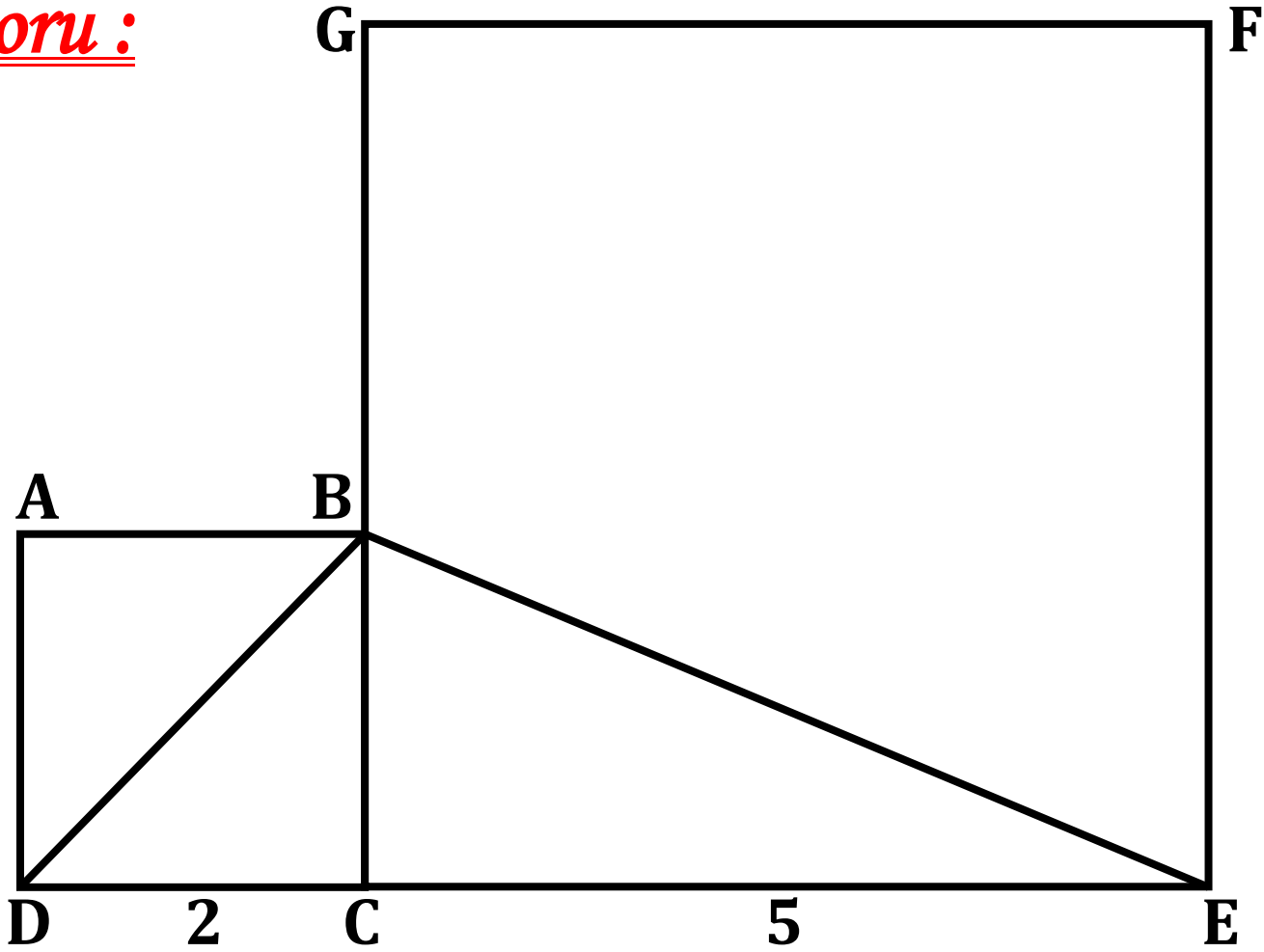
Soru: $\sin (\text{arc cot } 0,75 + 30^\circ) = ?$

Soru :



$$\cos (\widehat{BCD}) = ?$$

Soru :

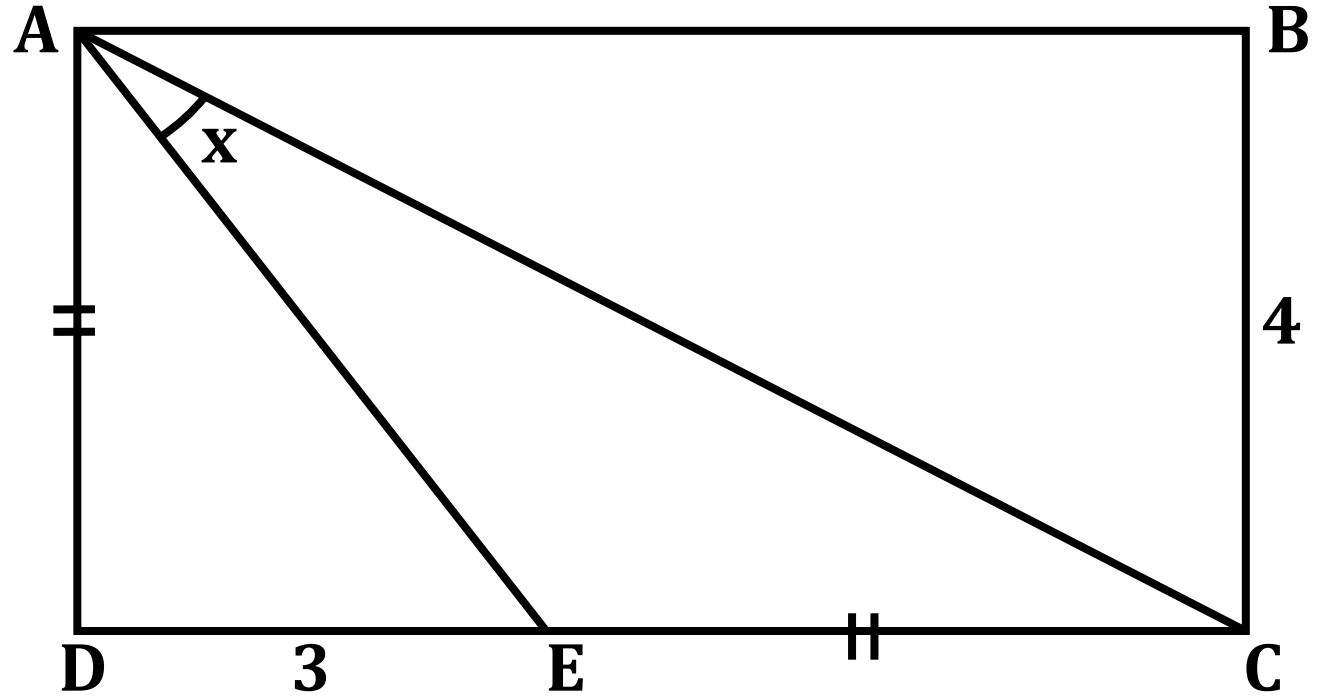


ABCD ve CEFB birer
karedir. Buna göre
 $\sin (\widehat{DBE}) = ?$

Soru :

ABCD bir dikdörtgen

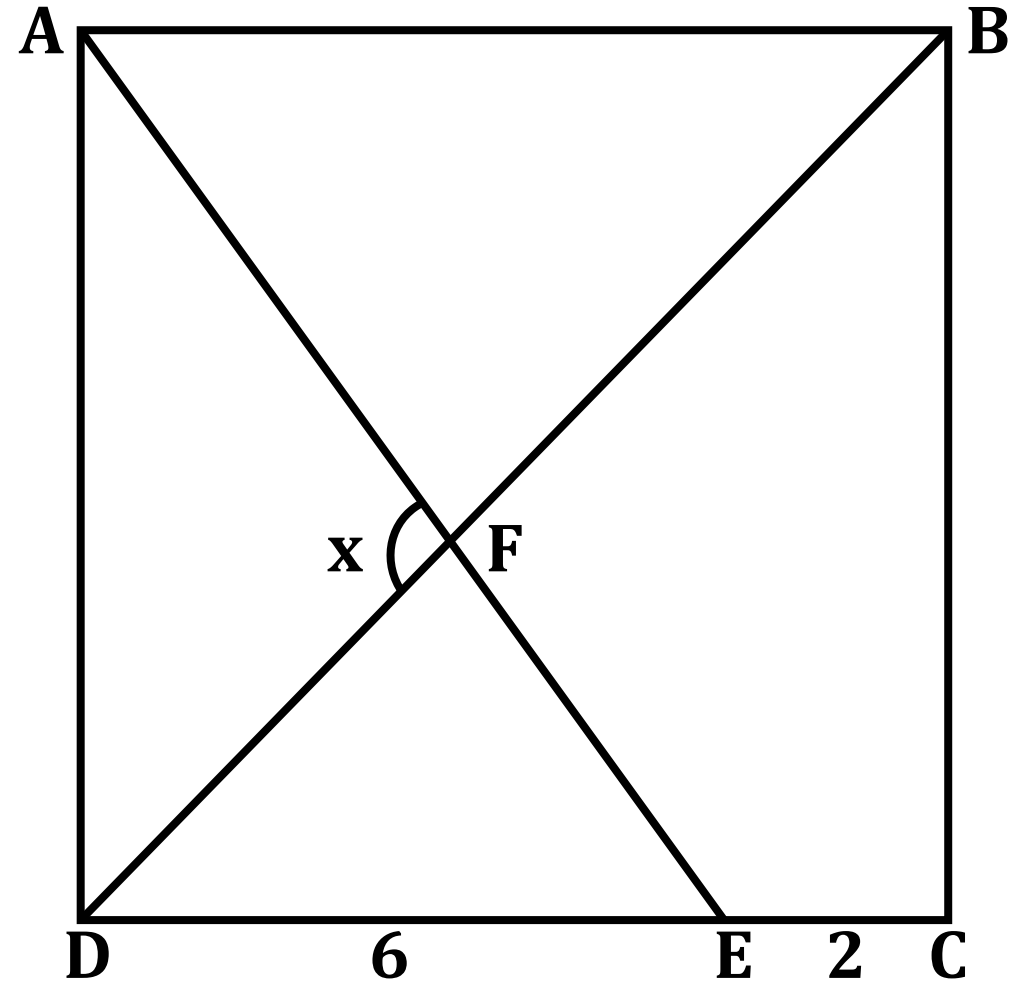
ise $\cos x = ?$



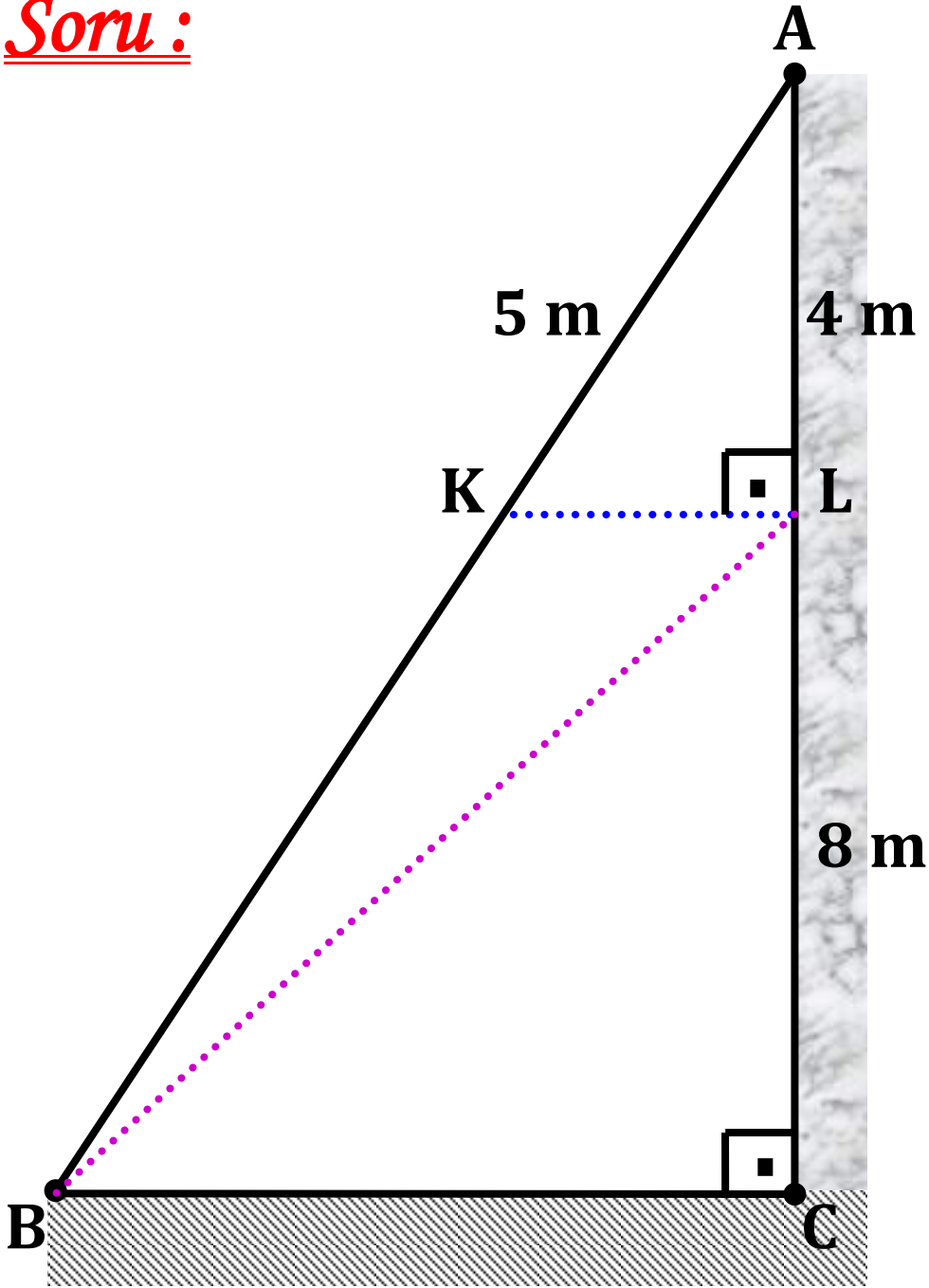
(İki iç açının toplamı komşu dış açıyı verir özelliğinden yararlanmak çözümü kolaylaştırır.)

Soru :

ABCD bir kare ise $\sin x = ?$



Soru :



A noktasında dik duvara dayanan merdiven şekildeki gibi verilmiştir. Buna göre $\sin (\widehat{KBL}) = ?$

Kural 2: Tanjant ve kotanjant trigonometrik fonksiyonlarının toplam ve fark formül açılımları aşağıdaki gibidir.

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

$$\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

$$\cot (a + b) = \frac{\cot a.\cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\cot (a - b) = \frac{\cot a.\cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

olarak alınır.

Not: $\tan \alpha = \frac{x}{y}$ ise $\cot \alpha = \frac{y}{x}$ idi. Kotanjant yerine tanjantın

formülü uygulanabilir ve ezber olayını azaltabiliriz.

Soru: $\tan 15^\circ = ?$

Soru: $\tan 105^\circ = ?$

Soru: $\cot 195^\circ = ?$

Soru : $x = \frac{5\pi}{16}$ ise $\frac{\tan 5x - \tan x}{1 + \tan 5x \cdot \tan x} = ?$

Soru: $\tan x = \frac{3}{5}$ ve $\tan y = \frac{4}{7}$ ise $\tan (x - y) = ?$

Soru : $\tan (x - y) = \frac{2}{3}$ ve $\tan y = \frac{3}{4}$ ise $\tan x = ?$

Soru: $\cot (x + y) = - \frac{2}{5}$ ve $\cot x = \frac{3}{5}$ ise $\cot y = ?$

Soru : $\tan (x + 45^\circ) = \frac{1}{3}$ ise $\tan x = ?$

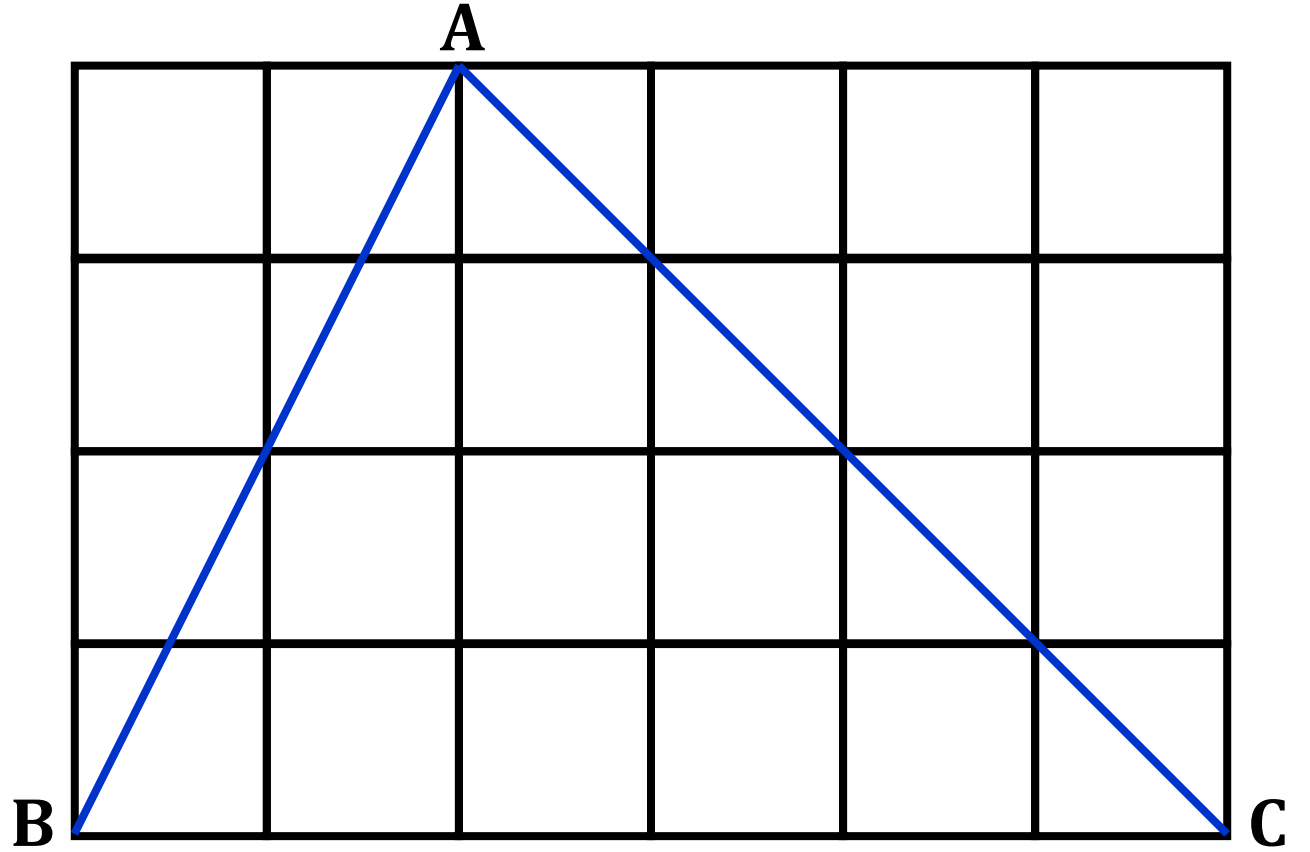
Soru: $x, y \in (0, \pi/2)$ olmak üzere $\cos x = \frac{3}{5}$ ve
 $\sin y = \frac{8}{17}$ ise $\tan(x - y) = ?$

Soru: Bir ABC üçgeninde $\sin \widehat{A} = 0,8$ ve $\cos \widehat{B} = \frac{5}{13}$ ise
 $\tan \widehat{C} = ?$

Soru : $\cot \left(\arcsin \frac{12}{13} + \arctan \frac{5}{2} \right) = ?$

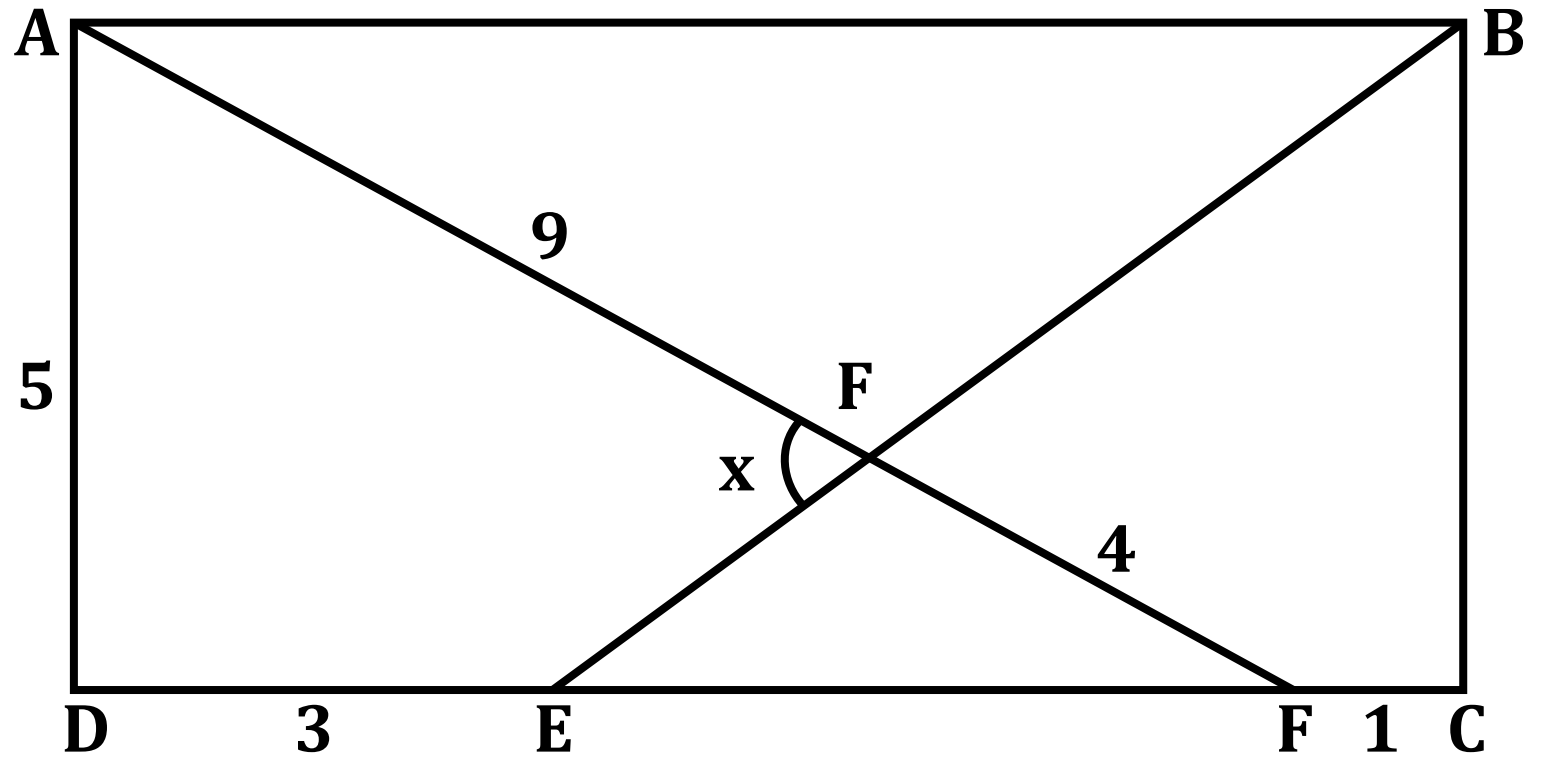
Soru :

**Birim karelerden oluşan
şekilde $\tan (\widehat{BAC}) = ?$**



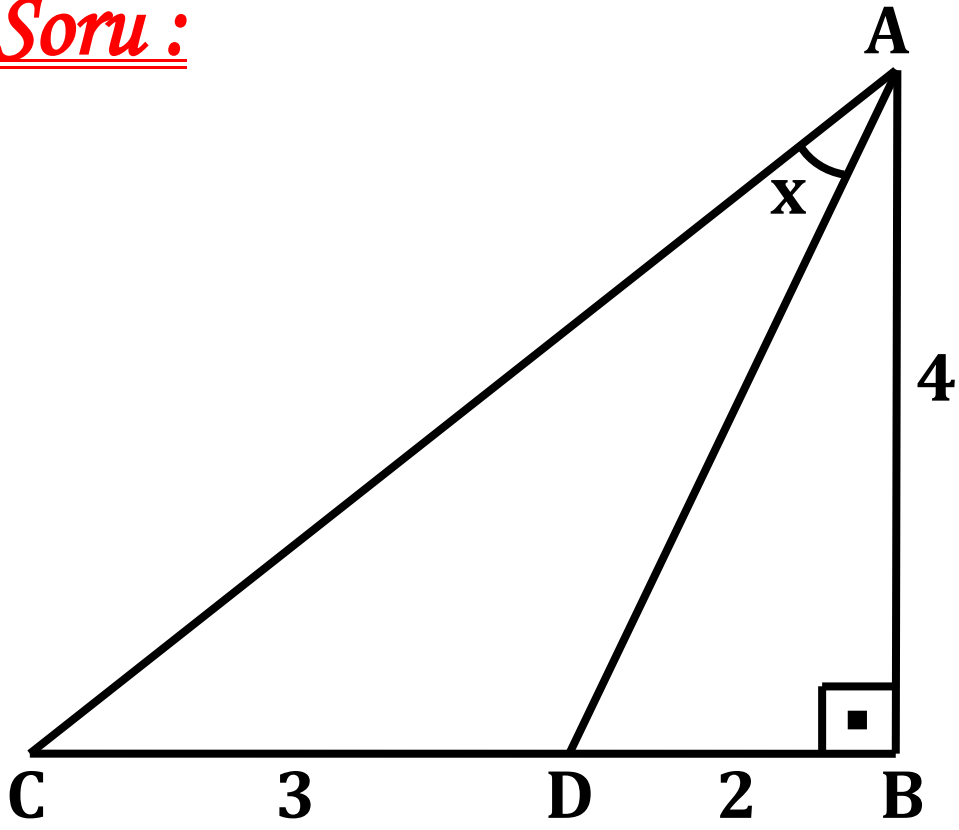
Soru :

ABCD dikdörtgen
ise $\tan x = ?$



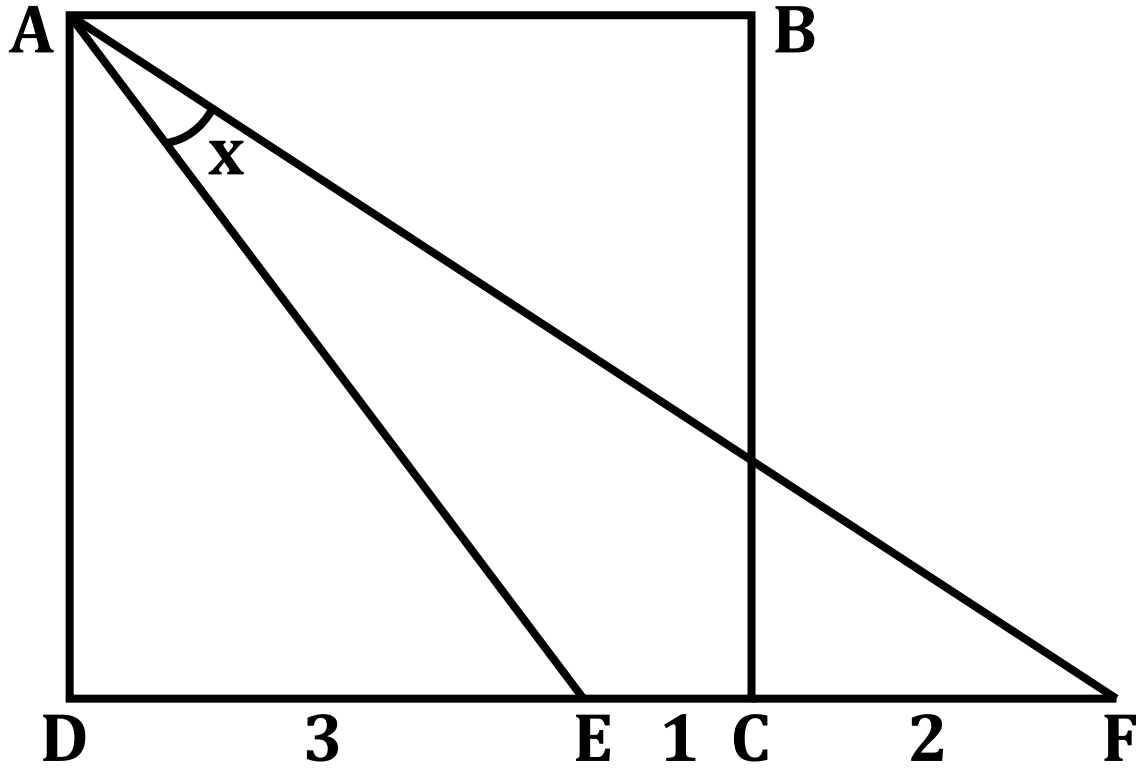
Soru :

$$\tan x = ?$$



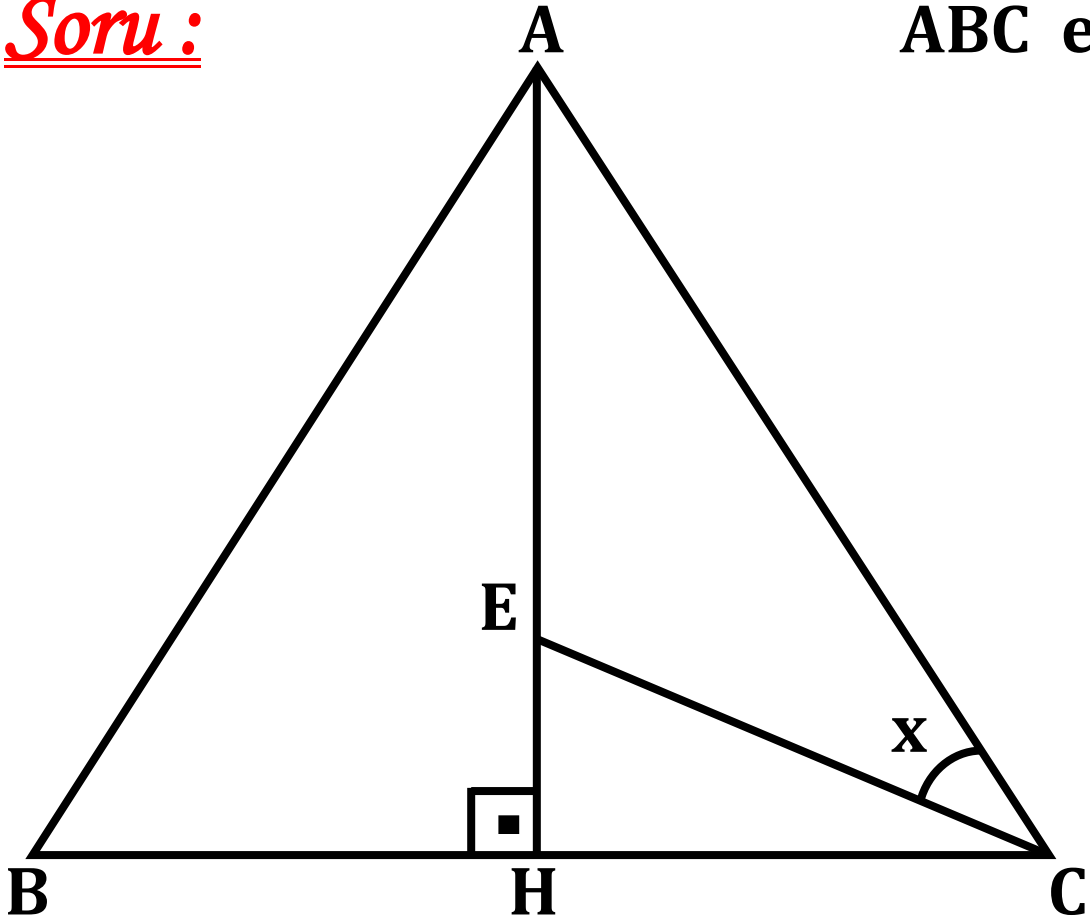
Soru :

ABCD bir kare ise $\tan x = ?$



Soru :

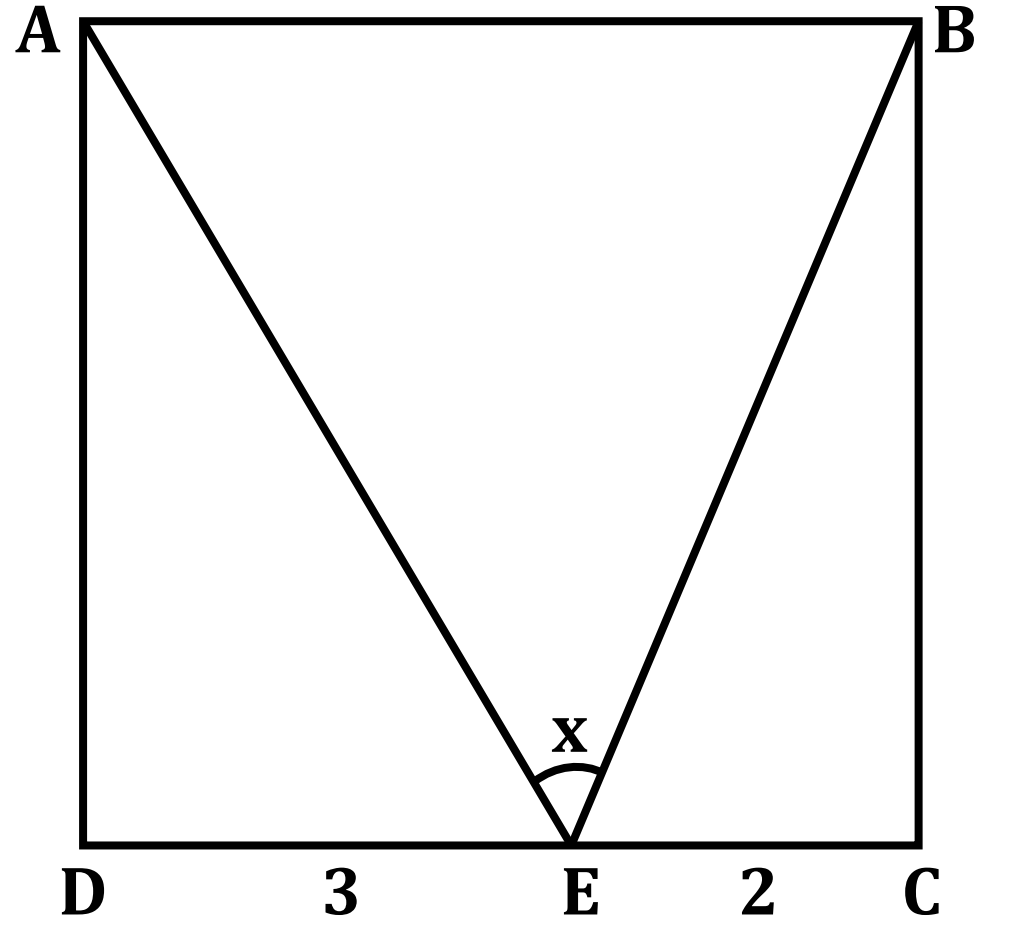
ABC eşkenar üçgen ve $|AE| = 2 \cdot |EH|$
ise $\cot x = ?$



Soru: Kenar uzunlukları $|AB| = 13$, $|AC| = 13$ ve $|BC| = 10$ br olan ABC üçgeninde A noktasından $[BC]$ tabanına H noktasında bir dik indiriliyor. $[HC]$ tabanında bir D noktası seçiliyor. $|HD| = 2$ br ise $\tan (\widehat{DAC}) = ?$

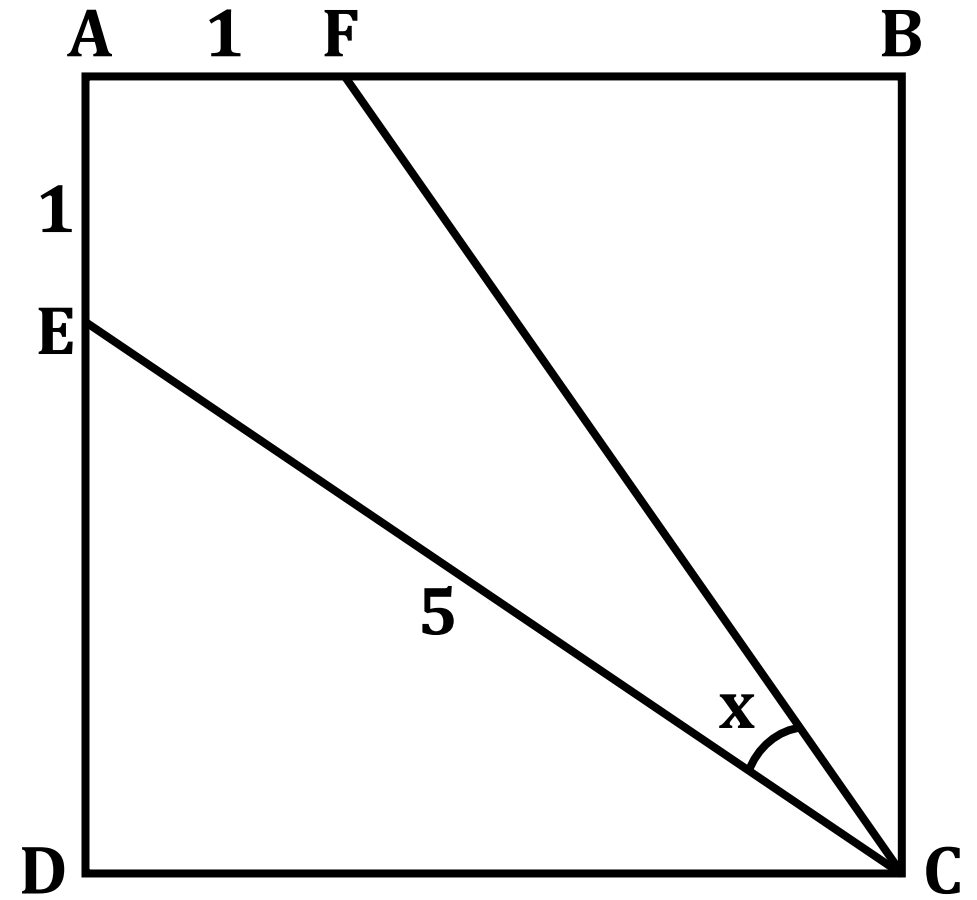
Soru :

ABCD bir kare ise $\tan x = ?$



Soru :

ABCD bir kare ise $\cot x = ?$



İki Kat Formülleri

Kural 1:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \sin (x + x) \\ &= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x\end{aligned}$$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ olarak bulunur.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 6x = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x$$

▪

▪

▪ olarak açılır.

Soru : $\frac{6\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = ?$

Soru : $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = ?$

Soru : $4 \cdot \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ = ?$

Soru : $24 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = ?$

Soru: $\cos 70^\circ = k$ ise $12 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$ işleminin sonucunu k türünden bulunuz.

Soru: $\sin 80^\circ = k$ ise $\sin 20^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 40^\circ$ işleminin sonucunu k türünden bulunuz.

Soru : $\frac{\sin 42^\circ}{\sin 14^\circ} - \frac{\cos 42^\circ}{\cos 14^\circ} = ?$

Soru: $\frac{\cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} + \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ} = ?$

Soru: $(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^4 = ?$ (Önce grubun karesini alarak işleme başlanır.)

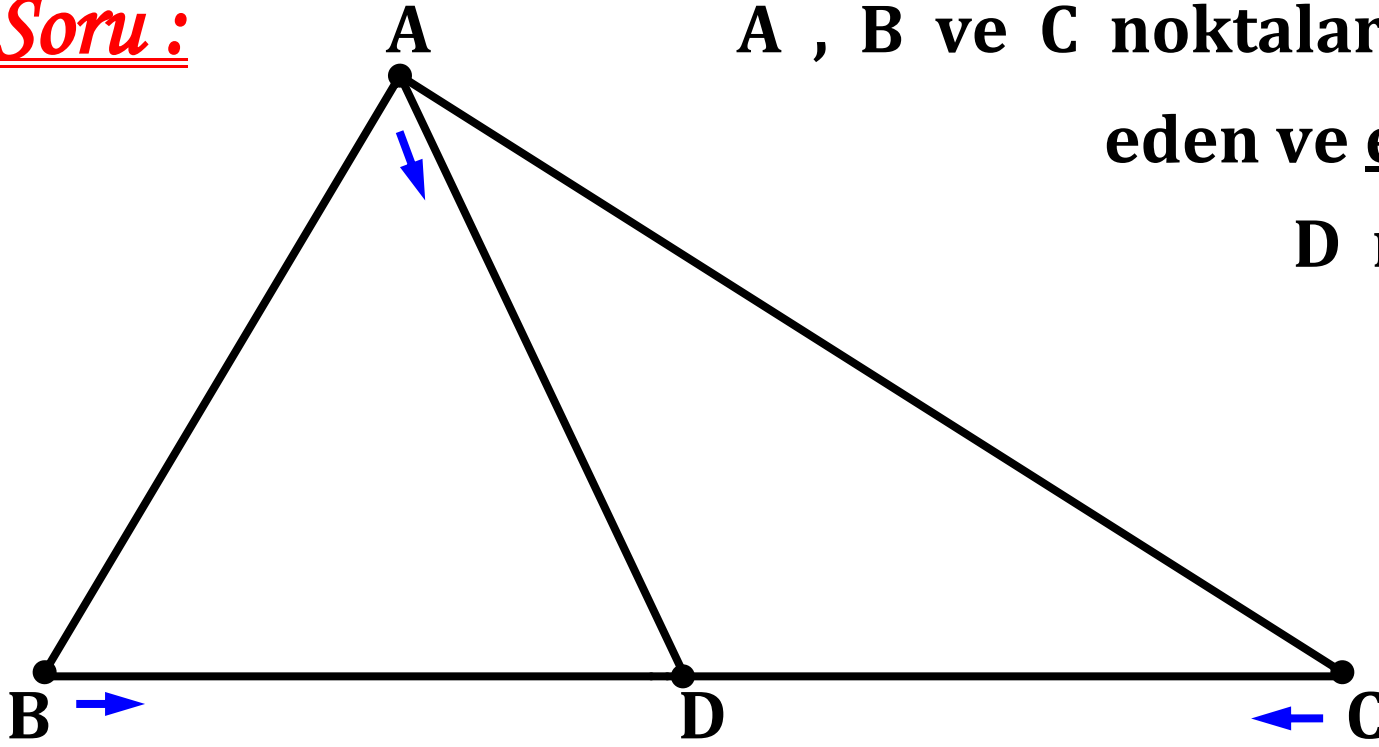
Soru : $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ ise $\sin 2x = ?$

Soru : $\sin 2x \cdot \cot x \cdot \sec x = ?$

Soru : $\frac{\sin 4x}{\cot x \cdot \cos 2x} = ?$

Soru :
$$\frac{2}{\sin 2x \cdot (1 + \tan^2 x)} = ?$$

Soru :



A , B ve C noktalarından aynı anda hareket eden ve eşit mesafe giden üç araç D noktalarında buluşuyor.

$$4 \cdot |AB| = 3 \cdot |AC|$$

$$\text{ise } \sin 2\hat{B} = ?$$

Kural 2:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos (x + x) \\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x\end{aligned}$$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \underbrace{1}_{\cos^2 x} - \sin^2 x - \sin^2 x$$

- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

veya

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \cos^2 x - \underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ olarak alınır. Soru

çözümlerinde uygun olan açılım seçilir.

Soru : $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ = ?$

Soru : $2\sin^2 \frac{\pi}{12} - 1 = ?$

Soru: $\sin 22,5^\circ = ?$

Soru: $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ ve $\cos x = \frac{3}{5}$ ise $\cos 2x = ?$

Soru: $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ ve $\tan x = \frac{2}{5}$ ise $\cos 2x = ?$

Soru : $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = ?$

Soru :

$$\frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{2\cos^2 x} = ?$$

Soru : $\frac{\cot^2 x - 1}{\cos 2x} \cdot (\operatorname{cosec} x)^{-1} = ?$

Soru: $x \in (180^\circ, 270^\circ)$ olsun. $\sqrt{1 - \cos 2x} = ?$

Soru: $x \in (3\pi / 2 , 2\pi)$ olsun. $\sqrt{8\cos 2x + 8} = ?$

Soru :

$$\sqrt{\frac{-\cos 66^\circ + 1}{2}} = ?$$

Soru: $\sin 50^\circ = k$ ise $\sin 10^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

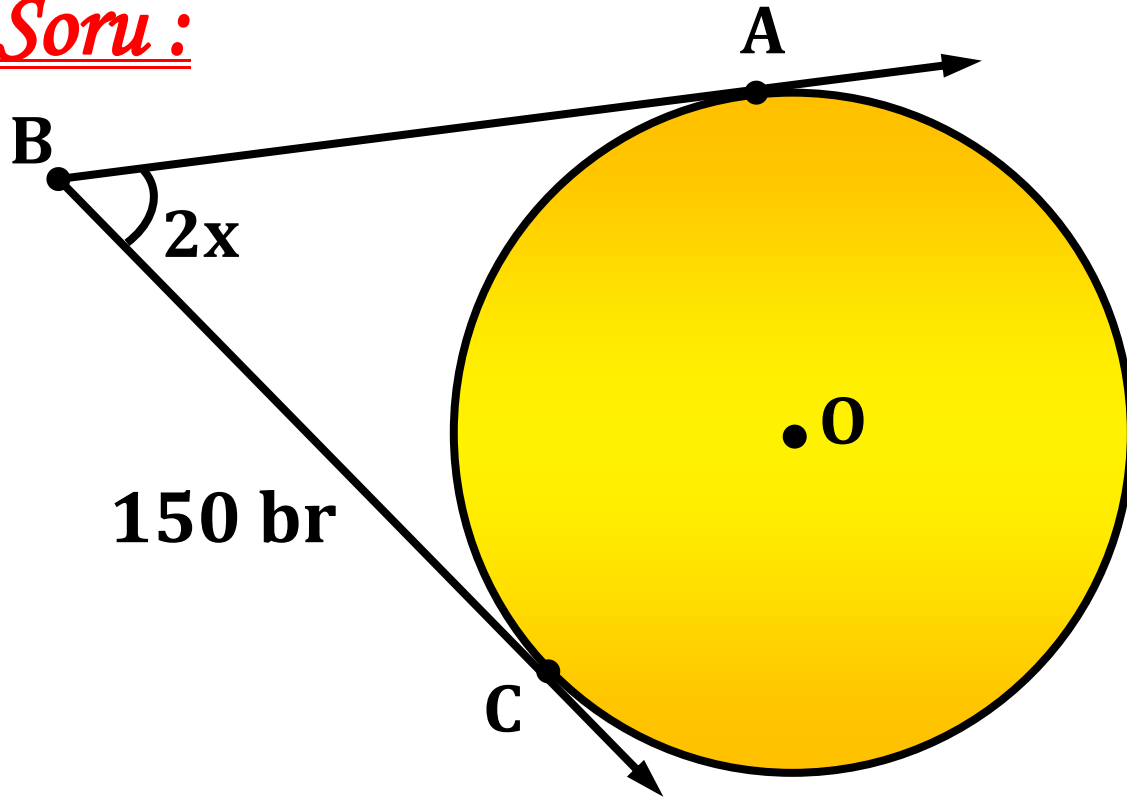
Soru: $\cos 80^\circ = k$ ise $\sin 70^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru: $\sin 164^\circ = k$ ise $\sin 418^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru: $\sin 50^\circ = k$ ise $\cos 20^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru: $\sin 40^\circ = k$ ise $\sin 155^\circ = ?$ (k türünden bulunuz.)

Soru :



O merkezli daire şeklindeki bir pistin alanı $6400\pi \text{ br}^2$ ise $\cos 2x = ?$ (A ve C çembere teğet noktalardır.)

Kural 3:

- $\tan 2x = \tan (x + x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \cdot \tan x}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{olarak bulunur.}$$

- $\cot 2x = \cot (x + x) = \frac{\cot x \cdot \cot x - 1}{\cot x + \cot x}$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Soru : $\tan x = \frac{2}{3}$ ise $\cot 2x = ?$

Soru : $\sin x = \frac{1}{4}$ ise $\tan 2x = ?$

Soru: $x \in (0 , \pi / 2)$ olsun. $\tan 2x = \frac{4}{3}$ ise $\tan x = ?$

Soru : $\frac{\sin x - 2\cos x}{\cos x - 2\sin x} = 2$ ise $\cot 2x = ?$

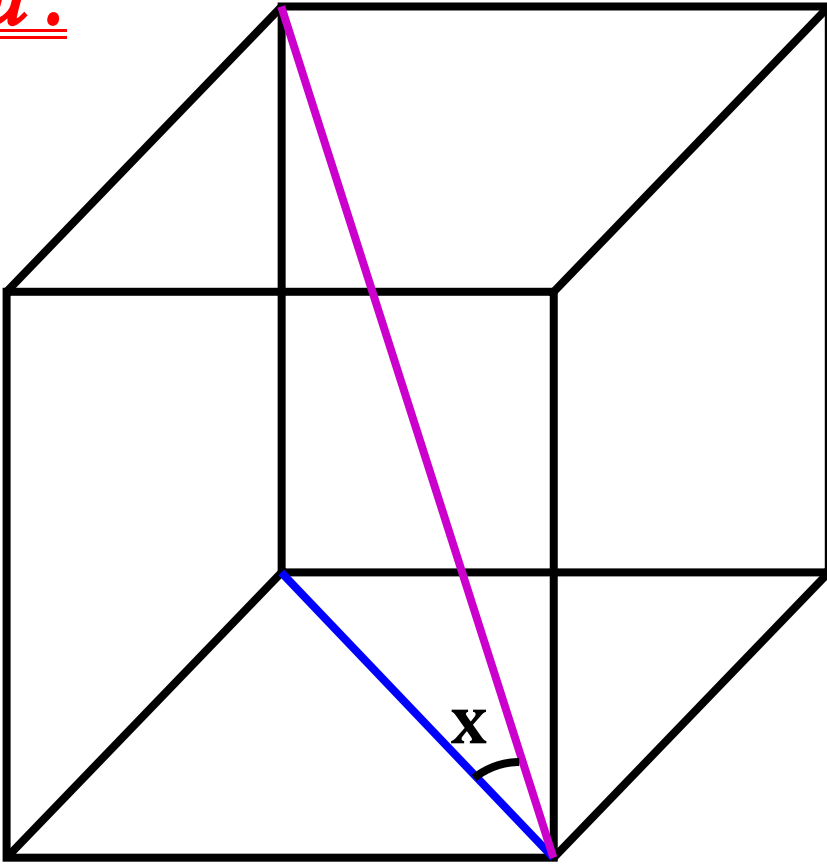
Soru :

$$\frac{2\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 2x} = \frac{3}{4} \text{ ise } \tan x = ?$$

Soru : $\tan \frac{\pi}{8} = ?$

Soru: $\cot 255^\circ = ?$

Soru :



Taban alanı 32 br^2 olan küpte

$\tan 2x = ?$

Soru :

O merkezli çemberde $\cot 2x = ?$

