GERÇEL SAYI ARALIKLARI

Kapalı Aralık

a ve b birer gerçel (reel) sayı olmak üzere, $a < b$ olsun. a ve b sayıları ile bu sayılar arasında kalan bütün reel sayılar a, b kapalı aralığını oluştururlar ve bu aralık [a, b] şeklinde gösterilir. Buna göre,

$A = \{x \mid a \le x \le b$ ve a, b, x reel sayı$\}$ ise $x \in [a, b]$ dir.

[a, b] kapalı aralığı

Açık Aralık

[a, b] kapalı aralığından a ve b sayıları çıkarılırsa (a, b) açık aralığı elde edilir ve a, b açık aralığı (a, b) şeklinde gösterilir. Buna göre,

$A = \{x \mid a < x < b$ ve a, b, x reel sayı$\}$ ise $x \in (a, b)$ dir.

(a, b) açık aralığı

Yarı Açık Aralık

[a, b] kapalı aralığından a ve b sayılarından sadece birisi çıkarılırsa yarı açık aralıklar elde edilir.

Buna göre,

$A = \{x \mid a \le x < b$ ve a, b, x reel sayı$\}$ ise

$x \in [a, b)$ dir.

[a, b) soldan kapalı sağdan açık aralık

$A = \{x \mid a < x \le b$ ve a, b, x reel sayı$\}$ ise

$x \in (a, b]$ dir.

(a, b] sağdan kapalı soldan açık aralık

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

I. $-2 < x < 4$

II. $3 \le x < 5$

III. $4 < x \le 9$

IV. $5 \le x \le 10$

V. $x \le 3$ ve $x > 2$

VI. $x \ge 2$ veya $-4 \le x \le 5$

Yukarıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm:

I. 

$-2 < x < 4$

II. 

$3 \le x < 5$

III. 

$4 < x \le 9$

IV. 

$5 \le x \le 10$

V. 

$x \le 3$ ve $x > 2$

VI. 

$x \ge 2$ veya $-4 \le x \le 5$

Örnek 2:

I.


II.


III.


IV.


V.


Yukarıdaki sayı doğrularında verilen aralıkları eşitsizlik ve aralık olarak gösterelim.

Çözüm:

I. $-4 \leq x < 5$, $[-4, 5)$ tir.

II. $-2 < x < 6$, $(-2, 6)$ dır.

III. $3 \leq x \leq 6$, $[3, 6]$ dır.

IV. $x < -2$ veya $x > 6$,

$(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$,

$R - [-2, 6]$ dır.

V. $x < 2$ veya $x \geq 3$,

$(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$,

$R - [2, 3)$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

I. $-3 < x \leq 2$

II. $-7 \leq x \leq -4$

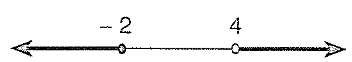
III. $x \leq -2$ ve $x \geq -6$

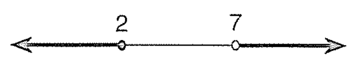
IV. $x \geq 3$ veya $-4 \leq x < 5$

Yukarıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

Soru 2:

I.


II.


III.


Yukarıdaki sayı doğrusunda gösterilen uzaklıkları, eşitsizlik ve aralık olarak yazınız.

BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

$a, b \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,
$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$

şeklindeki ifadelere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Bu ifadeleri doğrulayan x reel değerlerinin kümesine de **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

Çözüm Kümesini Bulma

Bilgi

$y = f(x) = ax + b$ fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ dır. Tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	a nın işareti ile ters işaretli	0	a nın işareti ile aynı işaretli

$x = -\frac{b}{a}$ değeri $ax + b = 0$ denkleminin köküdür. Kökün sağında ve solunda f(x) in işaretinin değiştiğine dikkat ediniz.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$f(x) = 2x + 5$ fonksiyonunun işaretini inceleyerek,

I. $2x + 5 > 0$

II. $2x + 5 < 0$

III. $2x + 5 \geq 0$

eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ dir. Fonksiyonda $a = 2 > 0$ olduğundan, tablo doldurulurken en sağdan + ile başlanacaktır.

Buna göre,

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
2x + 5	—	0	+

I. $2x + 5 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi;

$x > -\frac{5}{2}$ veya $\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$ ya da

$Ç.K = \{x \mid x > -\frac{5}{2}, x \in R\}$ ifadelerinden herhangi biriyle gösterilebilir.

II. $2x + 5 < 0 \Rightarrow Ç.K = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$ dir.

III. $2x + 5 \geq 0 \Rightarrow Ç.K = \left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$ veya

$-\frac{5}{2} \leq x < \infty$ dur.

Örnek 2:

$8 - 5x \leq 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

I. yol

$f(x) = 8 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$ ve $a = -5 < 0$ olduğuna göre,

x	$-\infty$	$\frac{8}{5}$	$+\infty$
$-5x + 8$	+	0	—

Çözüm kümesi $Ç.K = \left[\frac{8}{5}, \infty\right)$ bulunur.

II. yol

Yalnızca birinci dereceden bir eşitsizliğin çözümü için tablo yapmadan basit eşitsizlik kuralları ile çözüme gidilebilir.

$8 - 5x \leq 0 \Rightarrow 8 \leq 5x \Rightarrow \frac{8}{5} \leq x$ tir.

Buna göre, çözüm kümesi Ç.K $= \left[\frac{8}{5}, \infty\right)$ bulunur.

Örnek 3:

$$2x - 1 \leq \frac{4-5x}{2}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$2x - 1 \leq \frac{4-5x}{2} \Rightarrow 2(2x-1) \leq 4 - 5x$$
$$\Rightarrow 4x + 5x \leq 4 + 2$$
$$\Rightarrow 9x \leq 6$$
$$\Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Buna göre, çözüm kümesi;

Ç.K $= \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ bulunur.

Örnek 4:

$$\frac{3-x}{-2} \geq \frac{5-2x}{3}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\frac{3-x}{-2} \geq \frac{5-2x}{3} \Rightarrow 3(3-x) \leq (-2).(5-2x)$$
$$\Rightarrow 9 - 3x \leq 4x - 10$$
$$\Rightarrow 9 + 10 \leq 4x + 3x$$
$$\Rightarrow 19 \leq 7x \text{ olur.}$$
$$\Rightarrow \frac{19}{7} \leq x$$

Buna göre, çözüm kümesi,Ç.K $= \left[\frac{19}{7}, \infty\right)$ bulunur.

Soru 1:

$$-5x + 7 \leq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x \leq \frac{7}{5}$ ✓B) $x \geq \frac{7}{5}$ C) $x < \frac{7}{5}$

D) $x < -\frac{7}{5}$ E) $x > -\frac{7}{5}$

Soru 2:

$$\frac{5-3x}{-2} \leq 2x - 5$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > 5$ B) $x < 5$ C) $x \leq -4$

D) $x < -\frac{5}{7}$ ✓E) $x \geq 5$

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

$a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$,

$ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$

şeklinde verilen ifadelerin her birine ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. Bu ifadeyi doğruluyan x reel değerlerinin kümesine de eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Çözüm Kümesini Bulma

$f(x) = a.x^2 + bx + c$ fonksiyonunda x değiştikçe f(x) in işareti bilinirse eşitsizliğin çözüm kümesini bulabiliriz.

$a \neq 0$ ve $\Delta = b^2 - 4ac$ nin durumuna göre üç terimlinin işareti incelenir.

Bilgi

$\Delta > 0$ ise

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirinden farklı x_1 ve x_2 olmak üzere, iki kökü vardır.

$x_1 < x_2$ kabul ederek f fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
f(x)	a nın işareti ile aynı işaretli	a nın işareti ile ters işaretli	a nın işareti ile aynı işaretli

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$x \in R$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ üç terimlisi veriliyor; f(x) in işaretini inceleyerek,

I. $f(x) > 0$

II. $f(x) \geq 0$

III. $f(x) \leq 0$

eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 0$

2x −1

x −1

$(-2x - x = -3x)$

$\Rightarrow (2x-1)(x-1) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$ veya $x_2 = 1$ bulunur.

Denklemin kökleri $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ ve $a = 2 > 0$ olduğuna göre, tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f(x)	+	0	−	0 +

I. $2x^2 - 3x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi;

Ç $= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty) = R - \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ dir.

II. $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

Ç $= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty) = R - \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ dir.

III. $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,

Ç $= \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
B) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
C) $(-\infty, -1] \cup (3, \infty)$
D) $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$
✓ E) $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

Soru 2:

$$4 + 3x > x^2$$

eşitsizliğini sağlayan x in doğal sayı değerleri kaç tanedir?

A) 2 B) 3 ✓ C) 4 D) 5 E) 6

Soru 3:

$$-x^2 + 2x \leq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi (aralığı) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0]$
B) $(-\infty, 2]$
C) $[0, +\infty)$
D) $[0, 2]$
✓ E) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Soru 4:

$$x^2 - 4 < 28$$

eşitsizliğini sağlayan x in doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 5 B) 10 ✓ C) 15 D) 20 E) 25

Soru 5:

Karesi ile 3 katının toplamı 28 den büyük olan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 ✓ E) 5

Bilgi

$\Delta = 0$ ise,
$f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminin çakışık iki kökü (çift katlı kök) vardır. $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ dır.
Fonksiyonun işaret tablosu aşağıdaki şekilde olur.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	a nın işareti ile aynı işaretli	0	a nın işareti ile aynı işaretli

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$x \in R$, $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ üç terimlisi veriliyor.
f(x) in işaretini inceleyerek,

I. $f(x) > 0$
II. $f(x) \geq 0$
III. $f(x) \leq 0$

eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$ dir.

$2x \quad 3$

$2 \,.\, 2x \,.\, 3 = 12x$

Denkleminin kökleri $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$ ve $a = 4 > 0$ olduğuna göre, işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f(x)	+	0	+

I. $4x^2 - 12x + 9 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,
$Ç.K = R - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ dir.

II. $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,
$Ç.K = R$ dir.

III. $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi,
$Ç.K = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$x^2 - 18x + 81 < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) R B) $R - \{9\}$ C) $\{9\}$ ✓ D) $\varnothing$ E) $\{-9, 9\}$

Soru 2:

$$x(x-4) \geq -4$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $\{-9\}$ C) $\{2\}$ D) $R - \{2\}$ ✓ E) R

Bilgi

$\Delta < 0$ ise;
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökü yoktur.
Fonksiyonunun işaret tablosu aşağıdaki şekilde olur.

x	$-\infty$ $+\infty$
f(x)	a nın işareti ile aynı işaretli

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$x \in R$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$ üç terimlisi veriliyor. f(x) in işaretini inceleyerek,

I. $f(x) > 0$
II. $f(x) \geq 0$
III. $f(x) \leq 0$

eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulalım.

Çözüm:

$f(x) = 2x^2 - x + 3 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$ olduğundan, reel kök yoktur.
a=2 > 0 olduğuna göre, işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$					$+\infty$
f(x)	+	+	+	+	+	+

I. $2x^2 - x + 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, Ç = R dir.

II. $2x^2 - x + 3 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, Ç = R dir.

III. $2x^2 - x + 3 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$ dir.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$x^2 + 49 < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

✓
A) $\varnothing$ B) R   C) $\{-3, 3\}$

D) $R - \{-3, 3\}$ E) $R - [-3, 3]$

Soru 2:

$$x(3 - 4x) \leq 1$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ ✓ B) R   C) R^+

D) R^- E) $R - \left\{\frac{3}{4}\right\}$

Bilgi

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki ikinci dereceden fonksiyonların bütün x reel sayı değerleri için;

I. Daima pozitif olabilmesi için, $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

II. Daima negatif olabilmesi için, $a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = (a-1)x^2 - 2x + 2$$

fonksiyonu bütün x reel sayı değerleri için daima pozitif olduğuna göre, a nın tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

Her $x \in R$ için $f(x) > 0$ olabilmesi için, $a - 1 > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

$a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$ .... (1)

$\Delta = 4 - 4.2.(a-1) < 0$

$\Rightarrow \quad 4 - 8a + 8 < 0$

$\Rightarrow \quad 12 < 8a$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} < a$ .... (2)

Çözüm kümesi (1) ve (2) nin kesişimi, $\frac{3}{2} < a$ bulunur.

Örnek 2:

$x^2 + 3x + a - 2$ üç terimlisi x in bütün değerleri için 3 ten büyük olduğuna göre, a nın tanım aralığını bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R$ için,
$f(x) = x^2 + 3x + a - 2 > 3$
$\Rightarrow f(x) = x^2 + 3x + a - 5 > 0$ olması için,

$\Delta < 0$ ve x^2 nin katsayısı pozitif olmalıdır. Burada, x^2 nin katsayısı (1) sabit ve pozitif olduğundan bu şart sağlanmaktadır. Dolayısıyla sadece $\Delta < 0$ olması için gereken şartı bulmamız gerekmektedir. Buna göre,

$\Delta = 3^2 - 4.1.(a-5) < 0 \Rightarrow 9 < 4.(a-5)$
$\Rightarrow 9 < 4a - 20$
$\Rightarrow 29 < 4a$
$\Rightarrow \frac{29}{4} < a$ olur.

O halde, $a \in \left(\frac{29}{4}, +\infty\right)$ olmalıdır.

Örnek 3:

$$\frac{-x^2 - 4}{x^2 - kx + 1} < 0$$

eşitsizliğinin daima sağlanabilmesi için k nin hangi aralıkta olması gerektiğini bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R$ için $-x^2 - 4 < 0$ olduğundan eşitsizliğin daima sağlanabilmesi için,

$\forall x \in R$ için $x^2 - kx + 1 > 0$ olmalıdır.

Buna göre ;
$\forall x \in R$ için $x^2 - kx + 1 > 0$ olması için $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. $a = 1 > 0$ olduğundan
$\Delta = k^2 - 4.1.1 < 0$ olmalıdır.
$k^2 - 4 < 0$ eşitsizliğinin tablosunu yapalım.

	-2		2	
+		−		+

Çözüm kümesi; $-2 < k < 2$ olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3x^2 + 5x + m > x^2 + x - 2$$

eşitsizliği her x reel sayısı için sağlanabildiğine göre, m nin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(4, \infty)$ B) $[0, \infty)$ C) $[-\infty, -4)$

✓ D) $(0, \infty)$ E) $[-4, 4)$

Soru 2:

$$\frac{ax^2 + 2x - 3}{x^2 + 9} < 0$$

eşitsizliğinin daima sağlanabilmesi için a nın <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ ✓ B) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ C) $(-\infty, 0)$

D) $(0, \infty)$ E) R^+

GENEL EŞİTSİZLİK ÇÖZÜMÜ

Bilgi

Birden fazla denklemin çarpımı veya bölümüyle oluşan eşitsizliklerin çözüm kümesi bulunurken her birinin tablosu alt alta yazılarak en sonunda genel çözüm bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = x\,(x - 1)\,(x + 2) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Önce eşitsizliği oluşturan çarpanların her birinin köklerini bulalım.

$x = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Elde edilen köklerden yararlanarak, her çarpanın işaret tablosunu yapalım. Sonra her çarpanın işaretlerini alt alta çarparak eşitliğin işaret tablosunu bulalım.

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x	− − − −		− −	0	+ +		+ + + +
x + 2	− − −	0	+ +		+ +		+ + + +
x − 1	− − −		− −		− −	0	+ + + +
x(x + 2)(x − 1)	− − − −	0	+ + +	0	− − −	0	+ + + +
	Çözüm				Çözüm		

Çözüm kümesi, Ç.K $= (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ olur.

Bilgi

Bir eşitsizlik çözümü için aşağıda verilen genel yol izlenir.

1) Eşitsizlikte bulunan her çarpanın kökleri bulunur.
2) Bulunan kökler eşitsizlik tablosunda (sayı doğrusu üzerinde) küçükten büyüğe doğru sıralanır.
3) Bir eşitsizlikte bir kökten tek sayıda varsa bu köke tek katlı kök, çift sayıda varsa çift katlı kök denir.
   $f(x) = (x - a)^{2n+1}.g(x)$ şeklinde bir ifadede $x = a$ tek katlı bir köktür.
   $f(x) = (x - b)^{2n}.g(x)$ şeklinde bir ifadede, $x = b$ çift katlı köktür.
4) Eşitsizliğin işareti tespit edilir. Eşitsizliğin işareti; her çarpandaki en büyük dereceli değişkenin katsayılarının işaretlerinin çarpılması ile bulunur.
5) Eşitsizliğin işareti en büyük kökün sağından başlanarak yazılır ve sola doğru her köke geldikçe işaret değiştirilir.
6) Çift katlı köklerde işaret değiştirilmez. (Bir eşitsizlikte çift sayıda aynı kökten varsa bu köklere çift katlı kök denir.)
7) $f(x) > 0$ veya $f(x) \geq 0$ ise eşitsizliğin pozitif olduğu bölgeler çözüm kümesi olarak alınır.
   $f(x) < 0$ veya $f(x) \leq 0$ ise eşitsizliğin negatif olduğu bölgeler çözüm kümesi olarak alınır.

x	$-\infty$	x_1		x_2		x_3		x_4	$+\infty$
f(x)	+	0	+	‖	+	0	−	|	+

Yukarıdaki eşitsizlik tablosundaki köklerin altındaki sembollerin anlamı aşağıda verilmiştir.

x_1 = Eşitsizliği sağlayan çift katlı köktür.
x_2 = Eşitsizliği sağlamayan çift katlı köktür.
x_3 = Eşitsizliği sağlayan tek katlı köktür.
x_4 = Eşitsizliği sağlamayan tek katlı köktür.

Eşitsizliği sağlayan aralıkta tabloda taralı olarak verilmiştir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$9 - 3x < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$9 - 3x = 0 \Rightarrow x = 3$ ve x in katsayısının işareti (−) olduğundan eşitsizliğin işareti (−) dir.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$9 - 3x$	+		−
			$3 < x$

Çözüm kümesi, Ç.K $= (3, \infty)$ olur.

Örnek 2:

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ veya $x_2 = 3$ tür.

x^2 nin katsayısının işareti (+) olduğundan eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+		−		+
			$1 < x < 3$		

Çözüm kümesi, Ç.K $= (1, 3)$ olur.

Örnek 3:

$$f(x) = x.(2-x).(x+5) < 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlik çözümü için verilen yolu sırasıyla uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$$x = 0$$
$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusu üzerinde sıralayalım.

x	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$

3) Eşitsizliğin işaretini tespit edelim.

x in işareti **(+)**

(x + 5) te en büyük dereceli terimin (x) işareti **(+)**

(2 – x) te en büyük dereceli terimin (x) işareti **(–)**

Eşitsizliğin işareti ise **(+).(+).(–) = (–)** olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosunda en büyük kökün sağından başlayarak yazalım. Verilen eşitsizlikte çift katlı kök olmadığından her kökte işaret değişecektir.

x	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$
	+	–	+	–	

5) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$$f(x) < 0$$

x	$-\infty$	-5	0	2	$+\infty$
f(x)	+	–	+	–	
		$-5 < x < 0$		$x > 2$	

Çözüm kümesi, Ç.K = $(-5, 0) \cup (2, \infty)$ olur.

Örnek 4:

$$f(x) = (9 - x^2).(x^2 - 2x) > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlik çözümü için verilen yolu uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ veya $x_2 = -3$ tür.

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ veya $x_4 = 2$ dir.

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusunda sıralayalım.

x	$-\infty$	-3	0	2	3	$+\infty$
f(x)						

3) Eşitsizliğin işaretini tespit edelim.

$(9 - x^2)$ da en büyük dereceli terimin ($-x^2$ nin) katsayısının işareti **(–)** dir.

$(x^2 - 2x)$ de en büyük dereceli terimin (x^2 nin) katsayısının işareti **(+)** dır.

Eşitsizliğin işareti ise **(–) . (+) = (–)** olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosunda en büyük kökün sağından başlayarak yazalım.

x	$-\infty$	-3	0	2	3	$+\infty$
f(x)	–	+	–	+	–	

5) Verilen eşitsizlikte çift katlı kök yoktur.

6) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$$f(x) > 0$$

x	$-\infty$	-3	0	2	3	$+\infty$
f(x)	–	+	–	+	–	
		$-3 < x < 0$		$2 < x < 3$		

Çözüm kümesi, Ç.K = $(-3, 0) \cup (2,3)$ olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$3^x.(4 - x^2) > 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 2 ✓B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Soru 2:

$$(-x^2 + 9).(x^2 + 9) < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 3)$ B) $[-3, 3]$ ✓C) $R - [-3, 3]$

D) $(-\infty, 3)$ E) $[3, \infty)$

Soru 3:

$$x^3 > 27$$

eşitsizliğini sağlayan x in <u>en küçük farklı iki tamsayı</u> değerinin toplamı kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 ✓D) 9 E) 10

Soru 4:

$$(x+1)^{2005}.(2-x)^{2006}.(x-5)^{2007} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 ✓C) 4 D) 5 E) 6

Soru 5:

$$4^{x^2-2} - 2^{x^4-2x^2} < 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -1)$ B) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ C) $(-1, 1)$

D) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ✓E) $R - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Bilgi

Polinomların çarpımı şeklinde verilen

$f(x) \cdot g(x) \le 0$ veya $f(x) \cdot g(x) \ge 0$

şeklindeki eşitsizliklerde köklerin hepsi çözüm kümesine dahil edilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = -x^3 \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 1)^3$$

olduğuna göre, $f(x) \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Aynı çözüm yolunu uygulayalım.

1) Her çarpanın köklerini bulalım.

$-x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ tek katlı köktür.

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 2$ çift katlı köktür.

$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$ tek katlı köktür.

2) Bulduğumuz kökleri sayı doğrusu üzerinde sıralayalım.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f(x)		0	0	0 (Çift katlı kök)	

3) Eşitsizliğin işaretini bulalım.

$(-x^3)$ ün katsayısının işareti **(–)**

$(x^2 - 4x + 4)$ de en büyük dereceli terimin (x^2) nin katsayısının işareti **(+)**

$(x-1)^3$ ifadesinin açılımında en büyük dereceli terimin $(x^3$ ün$)$ katsayısının işareti **(+)** dır.

Eşitsizliğin işareti ise,

(–) . (+) . (+) = (–) olur.

4) Eşitsizliğin işaretini eşitsizlik tablosunda yazalım.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f(x)	–	0	+	0	–	0	–

5) Verilen eşitsizlikte $x = 2$ de çift katlı kök olduğundan işaret değiştirilmez.

6) Eşitsizliğin çözüm kümesini bulalım.

$f(x) \ge 0$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f(x)	–	0	+	0	–	0	–
			$0 \le x \le 1$			$x = 2$	

Çözüm kümesi : $Ç.K = [0,1] \cup \{2\}$

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(2 - x) \cdot (x^2 - 2x) \ge 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi (aralığı) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0]$ B) $[0, 2]$ C) $[0, +\infty)$

✓ D) $(-\infty, 0] \cup \{2\}$ E) $[2, +\infty) \cup \{0\}$

Soru 2:

$$(5 - x) \cdot (x^2 + 2x + 5) \ge 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in kaç farklı doğal sayı değeri vardır?

A) 4 B) 5 ✓ C) 6 D) 7 E) 8

Soru 3:

$$(x - 3)^2 \cdot (x^2 - 5x - 14) \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerleri toplamı kaçtır?

✓ A) 25 B) 22 C) 18 D) 17 E) 10

Bilgi

Kesirli ifade şeklindeki eşitsizliklerin çözümünde de yukarıdaki yöntemin aynısı uygulanır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{(2-x)^{2004} \cdot (3x - x^2)^{2003}}{-x^{2005}} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan tamsayılardan <u>en büyüğünü</u> bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = \frac{(2-x)^{2004} \cdot (3x - x^2)^{2003}}{-x^{2005}} < 0$$

köklerini bulalım;

$(2-x)^{2004} = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ çift katlı kök;

$(3x - x^2)^{2003} = [x(3-x)]^{2003} = x^{2003} \cdot (3-x)^{2003} = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$ tek katlı kök

$\Rightarrow x_3 = 3$ tek katlı kök

$-x^{2005} = 0 \Rightarrow x_4 = 0$ tek katlı kök,

$x_2 = 0$ tek katlı kökü ile $x_4 = 0$ tek katlı kökü beraber sayılınca çift katlı kök olur.

Eşitsizliğinin işaretini bulalım;

$(2-x)^{2004} \Rightarrow (-)^{2004} = (+)$ dır.

$(3x - x^2)^{2003} \Rightarrow (-)^{2003} = (-)$ dir.

$-x^{2005} \Rightarrow (-)$ dir.

Buna göre eşitsizliğin işareti (+) . (–) . (–) = (+) olur

Eşitsizlik tablosu;

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
f(x)		–		–		–		+	
		$-\infty < x < 0$		$0 < x < 2$		$2 < x < 3$			

Çözüm kümesi, $Ç.K = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3)$ olduğundan <u>en büyük</u> tamsayı değeri 1 olarak bulunur.

Soru 1:

$$\frac{5-x}{2x} > 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

✓ A) $(0, 5)$ B) $(5, \infty)$ C) $(-\infty, 0)$

D) $(1, 5)$ E) $(-5, 0)$

Soru 2:

$$\frac{x^2-3x-4}{x-7} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

✓ A) 11 B) 9 C) 7 D) 5 E) 3

Soru 3:

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} < 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[2, 3]$ B) $(2, \infty) \cup (-\infty, -3)$

✓ C) $(2, 3)$ D) $R - \{2, 3\}$

E) $R - [2, 3)$

Soru 4:

$$\frac{(-x^2+2x-3)^{2007}.(x^2-x)^{2008}}{-x+1} < 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-1, 0)$ C) $(0, 1)$

✓ D) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ E) $(1, \infty)$

Bilgi

Kesirli ifadeli eşitsizlikler (≤ 0 veya ≥ 0) şeklinde ise eşitsizliğin çözüm kümesi yazılırken paydanın kökleri atılır geriye kalan kökler çözüm kümesine yazılır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$f(x) = \frac{4-x^2}{5^{-x}.(2-x)^3} \le 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Her bir çarpanın köklerini bulalım.

$5^{-x} = 0 \Rightarrow$ reel kök yok

$(2-x)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ tek katlı kök(eşit üç kök)

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$ ve $x_3 = 2$

$x = 2$ eşitsizliğin içerisinde toplam dört tane olduğundan çift katlı köktür.

5^{-x} in işareti **(+)**

$(2-x)^3$ de en büyük dereceli terimin $(x)^3$ ün katsayısının işareti **(–)**

$4-x^2$ de en büyük dereceli terimin (x^2) nin katsayısının işareti **(–)** dir.

Eşitsizliğin işareti **(+) . (–) . (–) = (+)** olur.

Eşitsizlik tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f(x)		–	0	+	‖	+	

$\underbrace{\quad\quad}_{-\infty < x < -2}$ $\underbrace{\quad}_{x = 2}$

$f(x) \le 0$ eşitsizliğinde paydanın kökü 2 çözüm kümesine alınmaz. Yalnız payın kökü olan -2 çözüm kümesine alınır.

Çözüm kümesi : Ç.K $= (-\infty, -2]$ olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$\frac{x^2-5x}{x-x^2} \ge 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi (aralığı) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 1)$ B) $[5, +\infty)$ ✓ C) $(1, 5]$

D) $(1, 5] \cup \{0\}$ E) $(0, 5]$

Soru 2:

$$\frac{3^x(2-x)}{2x-10} \ge 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, 5)$ B) $[2, 5]$ ✓ C) $[2, 5)$

D) $(-\infty, 2] \cup (5, \infty)$ E) $[5, \infty)$

Soru 3:

$$\frac{x-2}{x+4} \geq 0$$

eşitsizliğini <u>sağlamayan</u> x tamsayılarının toplamı kaçtır?

A) -5 B) -6 C) -7 ✓D) -9 E) -11

Soru 4:

$$\frac{x^2-3x+2}{-x(x+1)} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 ✓E) 3

Soru 5:

a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\frac{2a-x}{2x+b} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığı $-2 < x \leq 5$ olduğuna göre, a.b kaçtır?

✓A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Bilgi

- Bir çarpanın işareti belli değilse sadeleştirme yapılamaz. Ancak işaret belli ise eşitsizlik kurallarına uygun olarak sadeleştirme yapılabilir.
- Eğer sadeleştirilme yapılmışsa, sadeleştirilen çarpanın kökünün, çözüm kümesinde olup olmayacağı ayrıca incelenmelidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(x+2)(3-x) \leq (x+2)$$

eşitsizliğinin çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

Eşitsizliğinin her iki tarafında bulunan $(x+2)$ çarpanı x in alacağı değerlere göre pozitif veya negatif de olabileceğinden sadeleştirilemez.

Eşitsizlik çözümü için eşitsizliği düzenleyelim.

$(x+2)(3-x) \leq (x+2)$

$\Rightarrow (x+2)(3-x) - (x+2) \leq 0$

$\Rightarrow (x+2)[3-x-1] \leq 0$

$\Rightarrow (x+2)(2-x) \leq 0$ olur.

$x+2=0 \Rightarrow x_1 = -2$

$2-x=0 \Rightarrow x_2 = 2$

Eşitsizliğinin işareti $(+) . (-) = (-)$ dir.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(x+2).(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$-\infty < x \leq -2$				$2 \leq x < \infty$	

Eşitsizliğinin çözüm kümesi:

Ç.K $= (-\infty, -2] \cup [2, \infty]$ olur.

Örnek 2:

$$\frac{x^2+2}{x+2} \leq 3$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Eşitsizliği düzenleyelim.

$$\frac{x^2+2}{x+2} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2-3x-6}{x+2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-3x-4}{x+2} \leq 0$$

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1 = -1$ veya $x_2 = 4$

$x+2=0 \Rightarrow x_3 = -2$

Eşitsizliğin işareti $(+) . (+) = (+)$ olur.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$		-2		-1		4		$+\infty$
$\frac{x^2-3x-4}{x+1}$		$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$-\infty < x \leq -2$				$-1 \leq x \leq 4$			

-2 paydanın kökü olduğundan çözüm kümesine alınmaz.

Çözüm kümesi : Ç.K $= (-\infty, -2) \cup [-1, 4]$ olur.

Örnek 3:

$$\frac{x^2-5x}{x^2+2} \geq 2$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R$ için x^2+2 pozitif olduğundan içler dışlar çarpımı yapılabilir ve eşitsizlik yönü aynı kalır.

Buna göre;

$$\frac{x^2-5x}{x^2+2} \geq 2 \Rightarrow x^2-5x \geq 2x^2+4$$

$$\Rightarrow x^2-5x-2x^2-4 \geq 0$$

$$\Rightarrow -x^2-5x-4 \geq 0$$

$-x^2-5x-4=0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = -4$ tür.

Eşitsizlik işareti $(-)$ dir.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$-x^2-5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
				$-4 \leq x \leq -1$			

Çözüm kümesi; Ç.K $= [-4, -1]$ olur.

Örnek 4:

$$\frac{3x^4-4}{-x^4} \geq 1$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R - \{0\}$ için $-x^4 < 0$ olduğundan eşitsizlikte içler dışlar çarpımı yapılabilir. Ancak her iki tarafı negatif sayı ile çarpınca eşitsizliğin yön değiştireceğine dikkat edilmelidir.

Buna göre;

$$\frac{3x^4-4}{-x^4} \geq 1 \Rightarrow 3x^4-4 \leq -x^4$$

$$\Rightarrow 4x^4-4 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4(x^2-1).(x^2+1) \leq 0$$

$x^2-1=0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$ dir.

$x^2+1=0 \Rightarrow Ç = \varnothing$ dir.

Eşitsizlik işareti : $(+)(+) = (+)$ olur.

Eşitsizlik tablosunu düzenleyelim.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	
				$-1 \leq x \leq 1$			

$\frac{3x^4-4}{-x^4} \geq 1$ eşitsizliği $x=0$ için,

tanımsız olduğundan $x=0$ çözüm kümesine alınmaz.

Çözüm kümesi : Ç.K $= [-1, 1] - \{0\}$ olur.

Soru 1:

$$\frac{x}{3} \leq \frac{3}{x}$$

eşitsizliğini sağlayan doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 ✓C) 6 D) 7 E) 8

Soru 2:

$$\frac{1}{2x-3} > \frac{1}{5}$$

eşitsizliğini sağlayan x in pozitif tamsayı değerleri kaç tanedir?

A) 1 ✓B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Soru 3:

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-3}$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x < -2$ B) $-2 < x < 3$ C) $x > 3$

✓D) $x < -2$ veya $x > 3$ E) $x < 3$

Soru 4:

$$\frac{1}{m+2} \leq 2$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) R B) $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ C) $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$

✓D) $R - \left[-2, -\frac{3}{2}\right)$ E) $(-\infty, -2]$

Soru 5:

$$1 - \frac{2}{x} \leq \frac{3}{x^2}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x tamsayısı vardır?

A) 2 B) 3 ✓C) 4 D) 5 E) 6

Soru 6:

2 fazlası ile 5 eksiğinin çarpımının kendisine bölümü 6 dan küçük olan kaç tane doğal sayı vardır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 ✓E) 9

Soru 7:

$$\frac{2x+1}{x-1} \leq \frac{x+2}{x-1}$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-\infty, 0)$

D) $(0, 1)$ ✓E) $\varnothing$

Soru 8:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\varnothing$ B) $(-2, 1]$ ✓C) R

D) $R - \{1\}$ E) $(0, \infty)$

Soru 9:

$$\frac{1}{x^2+4} \leq \frac{1}{x^2}$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) R ✓B) $R - \{0\}$ C) $(0, \infty)$

D) $\varnothing$ E) $(-\infty, 0)$

EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme eşitsizlik sistemi denir.

Sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimine ise eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi denir.

Bilgi

Eşitsizlik sistemini oluşturan herbir eşitsizlik tablosu ayrı ayrı yapılarak sonuçta hepsinde ortak olan bölge bulunur.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$x(5-x) \ge 0$$
$$x^2(x-1) \le 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x(5-x) \ge 0$ eşitsizliğinde

$x(5-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 5$ veya $x_2 = 0$ dır.

Eşitsizliğin işareti $(+)\,(-) = (-)$ dir.

$x^2(x-1) \le 0$ eşitsizliğinde

$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ çift katlı veya $x_2 = 1$ dir.

Eşitsizliğin işareti $(+)\,(+) = (+)$ dır.

Eşitsizliklerin tablolarını alt alta oluşturalım.

x	$-\infty$		0		1		5		$+\infty$
$x(5-x)$		− − −	0	+ + +		+	0	− −	
$x^2(x-1)$		− − −	0	− −	0	+ + +			

Tablolar oluşturulurken, her eşitsizliğin kökünü ve işaretini kendisine ait satırda kullandığımıza dikkat edelim.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, $0 \le x \le 1$ şartını sağlayan reel sayılardır. Çünkü tabloda da görüldüğü gibi,

$x(5-x) \ge 0$ eşitsizliği için, $Ç_1 = [0, 5]$

$x^2(x-1) \le 0$ eşitsizliği için, $Ç_2 = (-\infty, 1]$

olduğundan eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki aralığın kesişim kümesidir.

Yani, $Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = 0 \le x \le 1$ olur.

$x = 5$ değeri,

$x(5-x) \ge 0$ eşitsizliğini sağladığı halde,

$x^2(x-1) \le 0$ eşitsizliği sağlamadığından çözüm kümesine alınmamıştır.

$x = 0$ kökü her iki eşitsizlikte de bulunmasına rağmen her bir eşitsizlikteki durumuna göre ayrı ayrı işleme alınmıştır.

Örnek 2:

$$-2 < \frac{1}{x+2} \le 1$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$\underbrace{-2 < \overbrace{\frac{1}{x+2} \le 1}^{\text{I}}}_{\text{II}}$$

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi (I) ve (II) numaralı eşitsizliklerin ayrı ayrı çözümünden elde edilen kümelerin kesişimidir.

(I)..... $\frac{1}{x+2} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{x+2} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{-x-1}{x+2} \le 0$

(II)..... $\frac{1}{x+2} > -2 \Rightarrow \frac{1}{x+2} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{2x+5}{x+2} > 0$

Eşitsizliklerin kökleri ve işaretleri bulunursa eşitsizlik sisteminin tablosu;

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		-1		$+\infty$
$\frac{-x-1}{x+2}$		− −		−		+ +	0	− −	
$\frac{2x+5}{x+2}$		+ +		−		+ +		+ +	
		$-\infty < x \le -\frac{5}{2}$						$-1 \le x < \infty$	

Çözüm kümesi: $Ç.K = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup [-1, \infty)$ olur.

$x = -1$ (I) eşitsizliği sıfır (II) eşitsizliği (+) yaptığından çözüm kümesine alınmıştır.

$x = -\frac{5}{2}$ (I) eşitsizliğini (−), (II) eşitsizliğini sıfır yaptığından çözüm kümesine alınmamıştır.

Örnek 3:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-5x} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan tamsayıları bulalım.

Çözüm:

$\sqrt{x+3}$ ifadesinin reel sayılarda tanımlı olabilmesi için $x+3 \ge 0$ olmalıdır.

$x+3 > 0$ için $\sqrt{x+3} > 0$ dır.

Bu durumda $f(x) < 0$ olabilmesi için $x^2 - 5x < 0$ olması gerekir.

Buna göre,

$x + 3 > 0$ .... (I)

$x^2 - 5x < 0$ .... (II)

Eşitsizliklerin kökleri ve işaretleri bulunursa eşitsizlik sisteminin tablosu

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
$x+3$		− −		+ +		+ + + + +			
x^2-5x		+ + +				− −		+ + +	
						$0 < x < 5$			

olur.

(I) ve (II) nin kesişim kümesi (0, 5) olur.

Çözüm aralığındaki tamsayılar 1, 2, 3, 4 tür.

Örnek 4:

$$\sqrt{2x-7} < 5-x$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

Karekökü ortadan kaldırmak için her iki tarafın karesini alalım.

$\left(\sqrt{2x-7}\right)^2 < (5-x)^2 \Rightarrow 2x - 7 < (5-x)^2$

$\Rightarrow 2x - 7 < 25 - 10x + x^2$

$\Rightarrow 0 < x^2 - 12x + 32$ .... (I)

Bu eşitsizliğin sağlanması için (I) eşitsizliğini çözmek yetmez.

Bunun yanında;

kareköklü ifadenin tanımlı olması için,

$2x - 7 \ge 0$ .... (II) dir.

Kareköklü ifade pozitif bir sayıya eşit olduğuna göre, $5 - x$ ifadesinin pozitif olması gerekir.

$5 - x > 0$ .... (III) tür.

Buna göre, eşitsizliğin çözümü için,

$x^2 - 12x + 32 > 0$ .... (I)

$2x - 7 \geq 0$ .... (II)

$5 - x > 0$ .... (III)

eşitsizlik sisteminin çözümü gerekir.

Buradan kökler bulunur, eşitsizlik tabloları yapılırsa,

x	$-\infty$ — $\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$ — 4	4 — 5	5 — 8	8 — $+\infty$
(I)	+ +	+ +	−	− −	+ +
(II)	− −	0 + +	+ +	+ +	+ +
(III)	+ +	+ +	+ +	− −	− −

$\frac{7}{2} \leq x < 4$

Çözüm kümesi: $Ç.K = \left[\frac{7}{2}, 4\right)$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$\frac{7}{5-x} > 0$

$\frac{5}{1-x} < 0$

eşitsizlik sisteminin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 1)$ ✓B) $(1, 5)$ C) $(5, \infty)$

D) $(1, \infty)$ E) R

Soru 2:

$(x + 2).(x - 3) > 0$

$(x + 5).(x + 2) \leq 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan tamsayılar kaç tanedir?

A) 2 ✓B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Soru 3:

$4 < x^2 + 3x < 18$

eşitsizliğinin çözüm aralıklarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-4, 1)$ B) $(-4, 3)$ ✓C) $(-6, -4)$

D) $(3, 6)$ E) $(-1, 3)$

Soru 4:

$6 < x^2 - 3x + 60 < 60$

eşitsizlik sisteminin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 3)$ B) $(1, 5)$ ✓C) $(0, 3)$

D) $(3, \infty)$ E) R

Soru 5:

$\frac{7^x.(x-3)}{(x+2)^2} < 0$

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$

eşitsizlik sisteminin <u>en geniş</u> çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

✓A) $(-\infty, -1] - \{-2\}$ B) $(-2, -1)$ C) $(-\infty, -2)$

D) $(3, \infty)$ E) $(-\infty, -1]$

Soru 6:

$\frac{\sqrt{x-2}}{x-7} < 0$

eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

✓A) 18 B) 15 C) 13 D) 10 E) 8

Soru 7:

$\sqrt{x-2} < 2$

eşitsizliğini sağlayan x in kaç tane tamsayı değeri vardır?

A) 3 ✓B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

MUTLAK DEĞERLİ EŞİTSİZLİKLER

a ve b birer pozitif reel sayı olmak üzere,

i) $|f(x)| \le a \Rightarrow -a \le f(x) \le a$

ii) $|f(x)| \ge a \Rightarrow f(x) \ge a$ veya $f(x) \le -a$

iii) $a \le |f(x)| \le b \Rightarrow a \le f(x) \le b$ veya $a \le -f(x) \le b$ dir.

Bilgi

Eşitsizlik içerisinde $|x - a|$ şeklinde bir mutlak değerli ifade varsa, bu ifadenin içerisinin kökü $x = a$ olduğundan $x \ge a$ için ve $x \le a$ için eşitsizlik ayrı ayrı çözülüp bulunan çözüm aralıkları birleştirilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$|x^2 - 5x| \le 6$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$$|x^2 - 5x| \le 6 \Rightarrow \underbrace{-6 \le \overbrace{x^2 - 5x \le 6}^{\text{II}}}_{\text{I}} \text{ dır.}$$

Buna göre,

$x^2 - 5x \ge -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \ge 0$ .... (I)

$x^2 - 5x \le 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 \le 0$ .... (II)

Eşitsizliklerinin kökleri ve işaretlerine göre tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-1		2		3		6		$+\infty$
(I)		+ + +		+	0	− −	0	+ +		+ + +	
(II)		+ + +	0	−		− −		− −	0	+ + +	
			0		0		0		0		
			$-1 \le x \le 2$				$3 \le x \le 6$				

Çözüm kümesi, $Ç.K = [-1, 2] \cup [3, 6]$ olur.

Örnek 2:

$$x + 3 < |x - 4|$$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ olduğundan,

$x \ge 4$ iken

$x + 3 < |x - 4| \Rightarrow x + 3 < x - 4$

$\Rightarrow 3 < -4$ tür.

Bu eşitsizlik yanlış bir önerme olduğundan buradan çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

$x \le 4$ için,

$x + 3 < |x - 4| \Rightarrow x + 3 < 4 - x$

$\Rightarrow 2x < 1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2}$ dir.

Buradan $x \le 4$ ve $x < \frac{1}{2}$ nin ortak çözümlerinde çözüm aralığı $x < \frac{1}{2}$ bulunur.

Buna göre,

$x + 3 < |x - 4|$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi:

$Ç.K = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ olur.

Örnek 3:

$$3 - 2x > |x + 5|$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ olduğundan,

$x \ge -5$ için,

$3 - 2x > |x + 5| \Rightarrow 3 - 2x > x + 5$

$\Rightarrow -2 > 3x$

$\Rightarrow -\frac{2}{3} > x$ olur.

Buradan, $x \ge -5$ ile $x < -\frac{2}{3}$ ün ortak çözümü,

$-\frac{2}{3} > x \ge -5$ dir.

$x \le -5$ için

$3 - 2x > |x + 5| \Rightarrow 3 - 2x > -x - 5$

$\Rightarrow 8 > x$ dır.

Buradan, $x \le -5$ ile $x < 8$ in ortak çözümü,

$x \le -5$ dir.

Eşitsizliğin çözüm kümesi $-\frac{2}{3} > x \ge -5$ ile $x \le -5$ in birleşimi olur.

$Ç.K = \left[-5, -\frac{2}{3}\right) \cup (-\infty, -5] = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$|2x + 5| < -x + 3$$

eşitsizliğini sağlayan tamsayılar toplamı kaçtır?

A) −32 B) −30 ✓C) −28 D) −26 E) −24

Soru 2:

$$\left|\frac{3}{x^2 - 5}\right| > 1$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tamsayı değeri vardır?

✓A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Bilgi

Bir eşitsizliğin içerisinde bir çarpan, $\forall x \in R$ için sıfır veya pozitif ise bu çarpan yokmuş gibi işlem yapılabilir. Ancak çarpan sıfır olabiliyorsa çarpanın kökünün durumu ayrıca incelenmelidir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$\frac{x^2}{(x + 1)^2.(x^2 - 4)} \le 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R$ için $(x^2) \in R^+ \cup \{0\}$ dır.

$\forall x \in R$ için $(x + 1)^2 \in R^+ \cup \{-1\}$ dır.

Dolayısıyla eşitsizlikten bu çarpanları atarak işlem yapalım.

$$\frac{x^2}{(x + 1)^2.(x^2 - 4)} \le 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 4} \le 0$$

Eşitsizliğin köklerini bulup tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\frac{1}{x^2 - 4}$		+		−		+	
				$-2 < x < 2$			

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ dır.

Bu kök, payın kökü ve eşitsizlik (≤ 0) şeklinde olduğundan çözüm kümesinde olmalıdır.

$(x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$ dir. Bu kök paydanın kökü olduğu için çözüm kümesine alınmamalıdır.

Buna göre, çözüm kümesi

$Ç.K = (-2, 2) - \{-1\}$ bulunur.

Örnek 2:

$$\frac{x+3}{|x-1|} \geq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$\forall x \in R$ için $|x-1| \geq 0$ olduğundan eşitsizlik çözümünde işleme alınmayabilir.

Ancak $|x-1| = 0$ denkleminin kökü $x = 1$ değeri eşitsizliği sağlamadığından çözüm kümesine alınmamalıdır.

Buna göre, eşitsizliğin sağlanması için,

$|x-1| \geq 0$ olduğundan, $x+3 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir.

Buradan,

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ tür.

Çözüm kümesi : $Ç.K = [-3, \infty) - \{1\}$ olur.

Örnek 3:

$$\frac{x^2 + |x-3|}{x.(x^2-9)} \leq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

Eşitsizlikte $\forall x \in R$ için $x^2 + |x-3| > 0$ dır.

Buna göre,

$x.(x^2-9) < 0$ olmalıdır.

$x.(x^2-9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3$ tür.

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$x(x^2-9)$	−		+		−		+
	$x < -3$				$0 < x < 3$		

Çözüm kümesi : $Ç.K = (-\infty, -3) \cup (0, 3)$ olur.

Örnek 4:

$$\frac{(x^2-2x-8).|x-1|}{(x-6)^2} \geq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

x in bütün reel sayı değerleri için $|x-1| \geq 0$ olduğundan $|x-1|$ ifadesini eşitsizlik tablosunda işaret ve kök olarak almayabiliriz.

Ancak, $|x-1| = 0 \Rightarrow x = 1$ değeri eşitsizliği sağlayacağından çözüm kümesinde olmalıdır.

Aynı şekilde, $\forall x \in R$ için $(x-6)^2 \geq 0$ olduğundan $(x-6)^2$ ifadesini eşitsizlik çözümünde işleme alınmayabilir.

Ancak $(x-6)^2 = 0 \Rightarrow x = 6$ değeri eşitsizliği sağlamayacağından çözüm kümesinde olmamalıdır.

Bu durumda bu çarpanlar eşitsizlikten silinirse,

$$\frac{(x^2-2x-8).|x-1|}{(x-6)^2} \geq 0 \Rightarrow x^2-2x-8 \geq 0 \text{ olur.}$$

Bu eşitsizliğin tablosunu yapalım.

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
x^2-2x-8	+	0	−	0	+
	$x \leq -2$			$4 \leq x$	

Bu verilenlerin tümüne göre,

Çözüm kümesi: $(-\infty, -2] \cup [4, \infty) \cup \{1\} - \{6\}$ olur.

Örnek 5:

$$\frac{|x^2-x|.(x^2-9)}{|x+4|} \geq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesini bulalım.

Çözüm:

$|x^2-x| \geq 0$ olduğundan eşitsizlik tablosunda işaretlerini ve köklerini almayabiliriz. Ancak,

$|x^2-x| = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = 1$ değerleri payın kökü olduğundan, eşitsizliği sağlayacağından çözüm kümesinde olmalıdır.

$|x+4| \geq 0$ olduğundan eşitsizlik tablosunda işaretlerini ve köklerini almayabiliriz. Ancak,

$|x+4| = 0 \Rightarrow x = -4$ değeri eşitsizliği **sağlamayacağından** çözüm kümesinde **olmamalıdır.**

Buna göre,

$x^2 - 9 \geq 0$ olmalıdır.

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -3$ tür.

Eşitsizliğin işareti (+) dır.

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
x^2-9	+	0	−	0	+

$x = -4$ çözüm kümesinde olmayıp,

$x = 0$ ve $x = 1$ çözüm kümesinde bulunacağından, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi,

$Ç = (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \cup \{0, 1\} - \{-4\}$ olur.

Soru 1:

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} \geq 0$$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[2, 3]$

B) $(2, \infty) \cup (-\infty, -3)$

✓ C) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

D) $R - \{2, 3\}$

E) $R - [2, 2)$

Soru 2:

$$\frac{(4-x).|x|}{x^2+16} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane x doğal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 ✓ E) 5

Soru 3:

$$\frac{(2-x).(x+3)}{3|x|} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x in tamsayı değerleri kaç tanedir?

A) 2 B) 3 C) 4 ✓D) 5 E) 6

Soru 4

$$\frac{3-|2x+5|}{x^4+3} \leq 0$$

eşitsizliğini <u>sağlamayan</u> x in tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

✓A) −5 B) −4 C) −3 D) −2 E) −1

Soru 5:

$f: R \to R,$

$$f(x) = (2x+3-x^2).\sqrt{x-2}$$

olduğuna göre, $f(x) \geq 0$ eşitsizliğinin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, 3]$ B) $(-2, 3)$ C) $[-2, 1] \cup \{2\}$

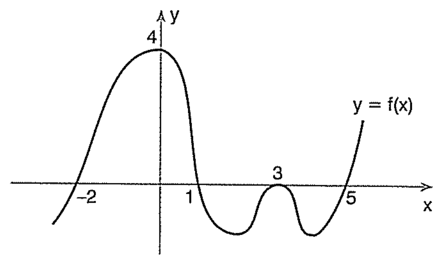
D) $(-2, 3) \cup \{-3\}$ ✓E) $[2, 3]$

Bilgi

Fonksiyon grafik olarak verilmişse fonksiyonun x eksenini kestiği noktalarda tek katlı kök x eksenine teğet olduğu noktalarda çift katlı kök vardır.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:



Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun işaret tablosunu yapalım.

Çözüm:

Fonksiyonun, x eksenini kestiği noktalar, kökleri olur.

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 5$ değerleri tek katlı kök,

$x_4 = 3$ değeri ise çift katlı köktür.

Buna göre, tablonun işareti,

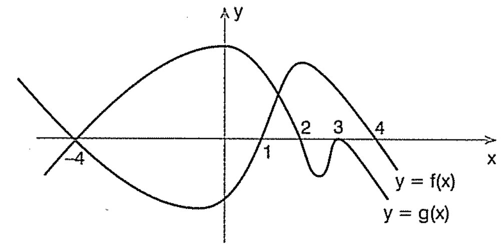
$x > 5$ için $f(x) > 0$ olduğundan (+) dır.

Buna göre, f(x) in işaret tablosu,

x	−∞		−2		1		3		5		+∞
f(x)		−	0	+	0	−	0	−	0	+	

olur.

Örnek 2:



Yukarıda y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$f(x).g(x) \leq 0$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm aralığını bulalım.

Çözüm:

f(x) = 0 denkleminin kökleri,
x = −4, x = 1 ve x = 4 tür.

g(x) = 0 denkleminin kökleri,
x = −4, x = 2 ve x = 3 (çift katlı) tür.

x = −4 değeri aynı eşitsizlikteki hem f(x) hem de g(x) in kökü olduğundan çift katlı kök olur.

Fonksiyonun işareti x > 4 için,
hem f(x) hem g(x) in işareti (−) olduğundan
(−).(−) = (+) olur.

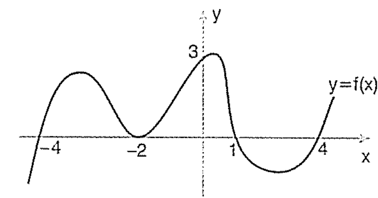
Buna göre, f(x).g(x) in işaret tablosu

x	−∞		−4		1		2		3		4		+∞
f(x).g(x)		−	0	−	0	+	0	−	0	−	0	+	

Çözüm kümesi : Ç = $(-\infty, 1] \cup [2, 4]$ olur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x) \leq 0$

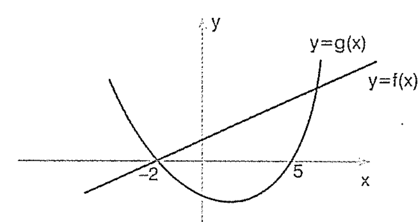
eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -4]$ B) $(-\infty, -4] \cup \{-2, 1, 4\}$

C) $[-4, 0]$ ✓D) $(-\infty, -4] \cup [1, 4] \cup \{-2\}$

E) $R - [-4, 1]$

Soru 2:



Yukarıda y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

$$\frac{x.f(x)}{g(x)} \leq 0$$

eşitsizliğinin <u>en geniş</u> çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

✓A) $[0, 5)$ B) $[0, 5] \cup \{-2\}$ C) $(-2, 5)$

D) $(-2, 0)$ E) $[-2, 0]$

İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ BİR DENKLEMİN KÖKLERİNİN İŞARETİNİN İNCELENMESİ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökleri x_1, x_2 ve $x_1 < x_2$ olsun.

1. $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} < 0$ ise kökler ters işaretlidir.

Yani, $x_1 < 0 < x_2$ dir. Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $|x_1| < x_2$ dir.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $|x_1| > x_2$ dir.

c) $x_1 + x_2 = 0$ ise $|x_1| = x_2$ kökler simetriktir.

2. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olmak üzere, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} > 0$ ise kökler aynı işaretlidir. Bu durumda;

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ ise $0 < x_1 < x_2$ olup köklerin her ikisi de pozitiftir.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$ ise $x_1 < x_2 < 0$ olup köklerin her ikisi de negatiftir.

Bilgi

Yukarıdaki kuralların ezberlenmesine gerek yoktur. Köklerin işaretinin incelenmesi ile ilgili sorulardan $x_1 + x_2$, $x_1 . x_2$ ve Δ ya bakılacağı bilinmelidir. Bunların işaretleri verilenlerden çıkartılabilir.

Bilgi Kavrama

Örnek 1:

$$(a + 2)x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

denkleminin birbirinden farklı negatif iki reel kökü olduğuna göre, a değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

Denklemin negatif farklı iki reel kökünün olabilmesi için,

$$\Delta > 0 \ .... \ (I)$$
$$x_1 . x_2 > 0 \ .... \ (II)$$
$$x_1 + x_2 < 0 \ .... \ (III)$$

şartlarının üçünün de sağlanması gerekir.

$$\Delta = (a - 1)^2 - 4.(a + 2).1 > 0$$
$$a^2 - 2a + 1 - 4a - 8 > 0$$
$$a^2 - 6a - 7 > 0 \ ....(I)$$
$$x_1 . x_2 = \frac{1}{a + 2} > 0 \ ....(II)$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-a + 1}{a + 2} < 0 \ ....(III)$$

(I), (II) ve (III) eşitsizlikleri ortak çözülürse,

a	$-\infty$	-2	-1	1	7	$+\infty$
(I)	+	+	−	−	+	
(II)	−	+	+	+	+	
(III)	−	+	+	−	−	
					$a > 7$	

O halde, a değerlerinin aralığı $(7, \infty)$ olur.

Örnek 2:

$$(m - 2)x^2 + 3mx + 3m - m^2 = 0$$

denkleminin ters işaretli iki reel kökü olduğuna göre, m değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

Denklemin ters işaretli iki reel kökünün olabilmesi için $x_1 . x_2 < 0$ olmalıdır.

Başka şarta gerek yoktur. O halde,

$\frac{3m - m^2}{m - 2} < 0$ eşitsizliğini sağlayan m değerlerinin aralığını bulalım.

m	$-\infty$ – 0	0 – 2	2 – 3	3 – $+\infty$
$\frac{3m - m^2}{m - 2}$	+	−	+	−
		$0 < m < 2$		$3 < m$

m değerlerinin aralığı : $(0, 2) \cup (3, \infty)$ olur.

Örnek 3:

$$(a - 2)x^2 - 3ax + a + 2 = 0$$

denkleminin aynı işaretli, farklı iki gerçek kökünün olması için, a değerlerinin aralığını bulalım.

Çözüm:

İkinci dereceden bir denklemin aynı işaretli, farklı iki kökünün bulunması için,

$\Delta > 0$ ve $x_1 . x_2 > 0$ olmalıdır.

O halde,

$(a - 2)x^2 - 3ax + a + 2 = 0$ denkleminde,

$\Delta = (-3a)^2 - 4.(a - 2).(a + 2)$

$= 9a^2 - 4a^2 + 16$

$= 5a^2 + 16$ ve $x_1 . x_2 = \frac{a + 2}{a - 2}$ dir.

Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 5a^2 + 16 > 0 \\ x_1 . x_2 = \frac{a + 2}{a - 2} > 0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin ortak çözümünü bulalım.

a	$-\infty$ – -2	-2 – 2	2 – $+\infty$
$\Delta = 5a^2 + 16$	+ +	+ +	+ +
$\frac{a + 2}{a - 2}$	+ +	− − −	+ +
	$a < -2$		$2 < a$

a değerlerinin aralığı $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ olur.

Örnek 4:

$(a + 3)x^2 + 2ax - a + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 dir.

$$x_1 < 0 < x_2 \text{ ve } |x_1| > x_2$$

olması için a nın alabileceği değerlerin aralığını bulalım.

Çözüm:

Verilen şartların sağlanması için,

$$x_1 . x_2 < 0$$
$$x_1 + x_2 < 0$$

koşulları birlikte sağlanmalıdır. Buna göre,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 . x_2 = \frac{-a + 1}{a + 3} < 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2a}{a + 3} < 0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin ortak çözümünü bulalım.

a	$-\infty$ – -3	-3 – 0	0 – 1	1 – $+\infty$
$\frac{-a + 1}{a + 3}$	− − −	+	+	− − −
$\frac{-2a}{a + 3}$	− − −	+	−	− − −
	$a < -3$			$1 < a$

O halde, a değerlerinin aralığı $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ bulunur.

Bilgi Uygulama

Soru 1:

$$(3-m)^2.x^2 + (2+m).x - 4x^2 + 1 = 0$$

denkleminin köklerinin işaretleri birbirinden farklı olduğuna göre, m nin alabileceği değerler kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(R, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, -\infty\right)$ B) $(3, \infty)$

C) $(1, 5)$ D) $\left(\frac{1}{2}, -\infty\right) \setminus \{3\}$

E) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (3)$

Soru 2:

$$x^2 - (3a-2).x + a^2 + 1 = 0$$

denkleminin negatif iki farklı gerçel kökü olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 1)$ B) $(-\infty, 0)$ C) $\left(-1, \frac{12}{5}\right)$

D) $\left(1, \frac{12}{5}\right)$ E) $\left(0, \frac{12}{5}\right)$

Soru 3:

$$mx^2 - 2x + m + 3 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1.x_2 < 0$ olduğuna göre, m nin bulunduğu <u>en geniş</u> aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 0)$ B) $(-\infty, 1]$ C) $[1, 6)$

D) $(-1, 6)$ E) $[-3, 0]$

Soru 4:

$3mx^2 - x - m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$x_1 < 0 < x_2 \text{ ve } |x_1| < x_2$$

olduğuna göre, m hangi aralıkta değerler alabilir?

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-3, -1)$ C) $(0, \infty)$

D) $(-2, 3)$ E) $(-1, 1)$